Diese Arbeit wurde vorgelegt am
Lehrstuhl für Mathematik (MathCCES)

Wie funktionieren eigentlich Animationsfilme und was hat das mit Mathe zu tun?

Ein Lernmodul im Rahmen eines mathematischen Modellierungstages

How do animated movies function and what does that have to do with mathematics?

A learning modul within the framework of a mathematical modeling day

Masterarbeit
Mathematik

August 2017

Vorgelegt von Presented by	Kirsten Wohak [redacted]
Erstprüfer First examiner	Prof. Dr. Martin Frank Lehrstuhl für Mathematik (MathCCES) RWTH Aachen University
Zweitprüfer Second examiner	Prof. Dr. Johanna Heitzer Lehrstuhl A für Mathematik RWTH Aachen University
Koreferent Co-supervisor	Dr. Christina Roeckerath Lehrstuhl für Mathematik (MathCCES) RWTH Aachen University
Koreferent Co-supervisor	Jannick Wolters Lehrstuhl für Mathematik (MathCCES) RWTH Aachen University

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1. Einleitung

Aus der meiner eigenen Schulerfahrung im Zuge des Praxissemesters oder der Nachhilfe ist eine häufig gestellte Frage im Mathematikunterricht: „Wofür brauche ich das später?“. Vermutlich kommt die Frage daher, dass zu viele Aufgaben aus Mathematikbüchern nicht authentisch sind. Es wird häufig so getan, als hätte eine Aufgabenart eines Bereiches der Mathematik mit einem bestimmten Kontext zu tun, wobei sowohl den Schülerinnen und Schülern[1] als auch den Lehrkräften klar ist, dass es sich schlicht um einen Einkleidungsversuch handelt (vgl. Siller et al., 2017, S. 10). In der Realität gibt es jedoch viele reale Problemstellungen, für deren Lösung Schulmathematik benötigt wird.
Damit den SuS die Rolle der Mathematik in der Gesellschaft bewusst wird, sollten in der Schule authentischere Aufgabenstellungen verwendet werden. Die SuS sollen erkennen, dass es viele Bereiche (Medizin, Automobilindustrie, Finanzsektor ...) in der Gesellschaft gibt, in denen Mathematik eine wesentliche Rolle spielt. Gerade der Fortschritt in der Gesellschaft benötigt Mathematik und die Grundlagen hierfür bildet die Mathematik, die bereits zur Schulzeit gelehrt uns gelernt wird. So müssen Funktionen aufgestellt, Ergebnisse ausgewertet, Statistiken formuliert und interpretiert werden können. Dies sollten sich Lehrbücher und Lehrkräfte zu Nutzen machen und diese Problemstellungen in den Unterricht einfließen lassen.
Das Schülerlabor CAMMP (computational and mathematical modeling program) der RWTH macht sich die Erstellung und Vermittlung von authentischen Problemstellungen zur Aufgabe. Die „Problemstellungen stammen stets aus der Forschung von Industrie und Wissenschaft und werden vom CAMMP-Team für die Behandlung mit Schüler/innen und Studierenden aufgearbeitet.“ (CAMMP, 2017, S. 1). Vor allem ermöglicht CAMMP, dass SuS verschiedener Jahrgangsstufen im Rahmen unterschiedlicher Angebote ihre Modellierungskompetenzen ausbauen.
Die Untersuchung der Entstehung und Funktionsweise von Animationsfilmen ist eine solche reale Problemstellung. Die ursprüngliche Idee, Animationfilme als ein Thema für ein Lernmodul zu nehmen, stammt von Agnes Peters, welche darüber ihre Dissertation (Peters, 2016) schrieb, bei der Umsetzung aber eine andere Herangehensweise wählte. Das Besondere dieses Kontextes ist, dass es sich um eine stark schülerrelevante Fragestellung, nach (vgl. Blum et al., 2013, S. 26), handelt: Jeder Jugendliche hat vermutlich schon mehrere Animationsfilme gesehen.
Da Animationsfilme aus einer Abfolge statischer Bilder erstellt werden, musste früher jedes einzelne Bild von Zeichnern gemalt werden. Heutzutage werden Animationen am Computer erstellt. Dabei werden nur noch die für eine Bewegung ausschlaggebenden Bilder, genannt Hauptbilder bzw. Keyframes, angefertigt. Die Zwischenbilder müssen nicht mehr hergestellt werden, da die Bewegung einzelner Gegenstände zwischen den Hauptbildern durch Funktionen beschrieben werden.
Die Ergebnisse des Erarbeitungsprozesses eines Lernmoduls zum Thema Animations-

[1] In dieser Masterarbeit wird im weiteren Text der einfacheren Lesbarkeit wegen anstelle von Schülerinnen und Schülern „SuS“ geschrieben.

filme werden in dieser Arbeit dargestellt: Das erste Kapitel konzentriert sich auf den didaktischen Hintergrund insbesondere in Bezug auf die mathematische Modellierung, welche eine wichtige Rolle während des kompletten Lernmoduls spielt, sowie die Rahmenbedingungen der Durchführungen des Lernmoduls. Im nächsten Kapitel folgen die mathematischen und theoretischen Hintergründe von Animationsfilmen, welche als Grundlage für den erarbeiteten Workshop dienen. Das didaktisch-methodische Konzept des erarbeiteten Moduls mit den gewünschten Zielen, der Struktur und einer Vorstellung der Materialien folgt im vierten Kapitel. Dabei wird auf die endgültige Version der Aufgabenblätter und den Quellcode eingegangen. Im darauf folgenden Kapitel werden die beiden Durchführungen und die dazu gehörigen Beobachtungen und Evaluationen sowie die daraus resultierenden Verbesserungen vorgestellt. Zum Schluss folgt ein kurzer Ausblick, was in Zukunft an dem Modul noch bearbeitet bzw. verbessert werden kann.

2. Didaktischer Hintergrund

In diesem Kapitel wird im ersten Teil darauf eingegangen, was hinter der Abkürzung und der Idee CAMMP steckt und welche Angebote CAMMP für SuS hat. Da bei den Projekten von CAMMP das mathematische Modellieren im Vordergrund steht, ist dieses Thema im Fokus des zweiten Teils. Dabei werden verschiedene Modellierungskreisläufe erläutert. Einer dieser Kreisläufe begleitet die SuS während des gesamten Lernmoduls.

2.1. Das Schülerlabor CAMMP

2.1.1. Angebote von CAMMP

CAMMP ist eine Abkürzung, die für ‚Computational And Mathematical Modelling Program' (computergestütztes und mathematisches Modellierungsprogramm) steht. Dahinter verbirgt sich ein Schülerlabor der RWTH Aachen, welches an der Graduiertenschule AICES und am Institut MathCCES angesiedelt ist.
Angelehnt an eigene Erfahrungen und Informationen der Hompage (CAMMP-Team, 2017), werden im Folgenden die verschiedenen Angebote von CAMMP vorgestellt:
Im Rahmen des Schülerlabors haben Lehrkräfte und SuS die Möglichkeit, sich mit realen und authentischen Problem auseinanderzusetzen und Situationen zu modellieren, die an den Kernlehrplan Mathematik von Nordrhein-Westfalen anknüpfen. Das Schülerlabor spricht vor allem naturwissenschaftlich begabte / interessierte SuS an, um ihnen die Möglichkeit der Förderung und Berufs- und Studienorientierung zu bieten. Manche Projekte von CAMMP sind aber auch so ausgelegt, dass heterogene Kurse und Klassen daran teilnehmen können. Insgesamt gibt es vier verschiedene Angebote: den CAMMP day, die CAMMP week, CAMMP science und CAMMP trainee.
Beim CAMMP day handelt es sich um einen Modellierungstag, an dem die SuS mit ihrem Kurs oder ihrer Klasse zur RWTH kommen und vor Ort an vorbereiteten, didaktisch-methodisch ausgearbeiteten Modulen arbeiten. Die SuS erfahren so authentische Anwendungen für die Schulmathematik. Sie haben Erfolgserlebnisse, da sie bspw. lernen, wie Shazam (Applikation zur Musikerkennung), ein GPS-Gerät oder Google funktionieren. Während des Tages werden sie von studentischen sowie wissenschaftlichen Mitarbeitern und Mitarbeiterinnen von CAMMP unterstützt. Ein solches Modul zu der Mathematik hinter Animationsfilmen wurde im Rahmen der vorliegenden Masterarbeit erstellt.
Eine CAMMP week ist eine Modellierungswoche, in welcher ungefähr 42 interessierte SuS aus unterschiedlichen Klassen und Kursen eine Woche in kleinen Gruppen verbringen und reale ungelöste Probleme von Firmen oder Instituten der RWTH lösen. Sie werden im Laufe der Woche von Lehrkräften, studentischen Hilfskräften, Professoren, Firmenvertretern und Doktoranden unterstützt. Am Ende der Woche stellen die SuS ihre Ergebnisse vor Firmenvertretern und Interessenten an der RWTH Aachen vor.
Im Rahmen des CAMMP science haben die SuS, die an der CAMMP week in diesem Jahr teilgenommen haben, die Möglichkeit, ihre Problemstellungen weiter auszuarbei-

ten. Die Ergebnisse können sie anschließend in Wettbewerben, wie bspw. Jugendforscht, einreichen. Für dieses Projekt sind die Herbstferien vorgesehen, damit die SuS sich an der RWTH regelmäßig zusammensetzen können.
Zudem gibt es noch das CAMMP trainee Projekt, was bedeutet, dass CAMMP Praktikanten aufnimmt und betreut. Diese haben zum einen die Möglichkeit, die Aktivitäten und Projekte vom Schülerlabor kennenzulernen, dabei mitzuwirken und zu helfen, Module weiterzuentwickeln. Anderseits lernen die SuS Doktoranden und das Institut kennen, können Vorlesungen besuchen und können sehen, wie das Studentenleben aussieht. Durch die sehr nahe Zusammenarbeit mit studentischen Hilfskräften erlangen die Praktikanten viele neue Eindrücke und viele Fragen beantwortet.
Zuletzt gibt es für Lehramtsstudenten und -studentinnen die Möglichkeit, im Rahmen eines Proseminars im Bachelor Materialien von bestehenden CAMMP days zu überarbeiten (vgl. CAMMP, 2017, S. 2). Die Studierenden besuchen einmal einen CAMMP day und bearbeiten diesen zusammen mit den SuS. Währenddessen überlegen sie sich bereits, welchen Teil des Tages bzw. des Materials sie überarbeiten bzw. verbessern wollen. In Absprache mit den Dozenten überarbeiten die Studierenden selbstständig den gewünschten Aspekt und führen diesen in einer weiteren Durchführung des CAMMP days selbst durch. Im Anschluss werden die durchgeführten Verbesserungen in Form einer kurzen Ausarbeitung und einem anschließenden Vortrag festgehalten.

2.1.2. Ziele von CAMMP

Durch die verschiedenen Angebote will CAMMP SuS die mathematische Modellierung anhand von realen, interessanten und alltagsnahen Beispielen näher bringen. Dazu gehören zum einen das Verständnis der mathematischen Modellierung, aber zum anderen auch die passenden Problemstellungen. Die Besonderheit ist, dass es sich dabei um authentische, nach (vgl. Blum et al., 2013, S. 25), Aufgabenstellungen handelt. Es sind also keine Aufgabenstellungen, die so konstruiert werden, dass ein bestimmtes Inhaltsfeld der Mathematik abgedeckt wird. Sie sind authentisch und bedienen sich kontextabhängig der Mathematik verschiedener Bereiche (vgl. CAMMP, 2017, S. 1).
Zu dem Prozess des Lösens gehören mehrere Schritte, die des Modellierungskreislaufes, auf welche im nächsten Kapitel 2.2 ausführlicher eingegangen wird. Hier werden sie einmal angerissen: Zunächst muss die sprachlich vorliegende Problemstellung verstanden und darüber diskutiert werden, damit klar wird, worin die Schwierigkeit des Problems liegt. Danach muss das Problem mathematisiert werden, so dass ein Computer Ergebnisse berechnen kann. Diese müssen interpretiert werden, indem sie in Bezug auf die ausgehende Problemstellung hin bewertet und überprüft werden (CAMMP-Team, 2017).
In diesem Prozess erwerben die SuS viele wichtige Kompetenzen oder entwickeln sie weiter. Dazu gehört zum einen die Teamfähigkeit, da die SuS in allen Projekten in Gruppen arbeiten und sie sich stets gegenseitig auf dem Laufenden halten müssen.
Ein weiteres Ziel von CAMMP ist, wie bereits vorher erwähnt, die Berufs- und Studienorientierung. Durch die Auseinandersetzung mit der Modellierung, dem Programm MATLAB, der Mathematik und Informatik bekommen die SuS viele verschiedene Ein-

drücke und sammeln Erfahrungen, um für sich entscheiden zu können, ob für sie ein Studium in diesem Bereich in Frage kommt (vgl. CAMMP, 2017, S. 1).
Des Weiteren soll den SuS durch die Behandlung verschiedener alltagsrelevanter Themen die Bedeutung von Mathematik in der Gesellschaft bewusst werden. Es gibt nur sehr wenige Bereiche, in denen Mathematik keine Rolle spielt (vgl. CAMMP, 2017, S. 1).
Zuletzt will CAMMP nicht nur die SuS ansprechen, sondern auch die Lehrkräfte, welche durch die Teilnahme an Projekten ebenfalls motiviert und fortgebildet werden sollen. Sie können Ideen bekommen, wie authentische Problemstellungen und alltagsnahe Situationen in den Unterricht eingebunden werden können. Dafür arbeitet CAMMP an Material, das an Schulen eingesetzt werden kann, um den Einstieg in solche authentischen Problemstellungen zu erleichtern (vgl. CAMMP, 2017, S. 1).

2.1.3. Ablauf eines CAMMP days

Im Rahmen der Arbeit wurde ein Modul für einen CAMMP day entwickelt, weshalb der organisatorische Rahmen eines solchen Tages hier nun genauer beleuchtet wird.
CAMMP days richten sich an Schülergruppen der Mittel- oder Oberstufe. Welche Stufe angesprochen wird, ist abhängig vom Modul und der dafür notwendigen Mathematik. Neben dem Angebot eines Modellierungstages für ganze Klassen, Stufen oder starke Schülergruppen gibt es das Angebot freier CAMMP days. Zu einem solchen Tag können sich SuS von verschiedenen Schulen anmelden. So können motivierte, interessierte und begabte SuS gefördert werden.
Im Vordergrund eines CAMMP days steht der Computereinsatz. Die Besonderheit der angebotenen Module ist, dass die SuS zur Bearbeitung realer Probleme zum einen die mathematische Modellierung (siehe Kapitel 2.2)und zum anderen den Computer verwenden. Im entwickelten Modul wird mit MATLAB (siehe Kapitel 4.3.15) gearbeitet und dort schreiben die SuS nicht den kompletten Code selbst, sondern finden einen Lückentext vor, welcher vorbereitet wurde. Die SuS bekommen, um die Problemstellung zu lösen, als Unterstützung Arbeitsblätter an die Hand. Zusätzlich werden im Laufe des Tages Vorträge gehalten und Sicherungsphasen eingeschoben, um den SuS Orientierung zu geben.
Der Ablauf jedes CAMMP days folgt einer bestimmten Struktur: Zu Beginn werden die SuS von den durchführenden Dozenten / Dozentinnen[2] begrüßt, indem den SuS kurz der Tagesablauf vorgestellt wird und sie etwas über das Schülerlabor CAMMP erfahren. Danach folgt eine etwa zwanzigminütige Einführung in die mathematische Modellierung der Doktoranden / Doktorandinnen[3]. Im Anschluss daran wird die Problemstellung des Tages vorgestellt. Dabei werden gegebenenfalls kurze Experimente

[2] In dieser Masterarbeit wird im weiteren Text der einfacheren Lesbarkeit wegen anstelle von Dozenten und Dozentinnen „Dozenten“ geschrieben. Hiermit sind selbstverständlich beiderlei Geschlechter gemeint.

[3] In dieser Masterarbeit wird im weiteren Text der einfacheren Lesbarkeit wegen anstelle von Doktoranden / Doktorandinnen „Doktoranden“ geschrieben. Hiermit sind selbstverständlich beiderlei Geschlechter gemeint.

durchgeführt oder Videos gezeigt, so dass die SuS einen anschaulichen Einstieg in die Thematik erhalten. Bevor die SuS eigenständig arbeiten können, werden die verwendete Software und ihre Hauptfunktionen kurz vorgestellt, damit den SuS der Umgang leichter fällt. Den Rest der Zeit arbeiten sie an dem Workshop, wobei sie zwischendurch eine kleine Pause (10 - 15 Minuten) und eine große Mittagspause (eine Stunde) haben. Nach jeder Aufgabe stellen die SuS sich gegenseitig ihre Lösungen vor, damit alle auf dem gleichen Stand bleiben und Unklarheiten beseitigt werden können. Zusätzlich findet im Zuge dieser Besprechung, wenn möglich, ein Rückbezug auf den Modellierungskreislauf (siehe Kapitel 2.2) statt. Vor der Mittagspause werden fünfzehn Minuten für einen Vortrag zur Studienorientierung verwendet. Am Ende des Tages, ungefähr eine halbe Stunde vor Ende des CAMMP days, findet der Abschluss in Form einer letzten Ergebnispräsentation seitens der SuS und einer Abschlusspräsentation der Dozenten statt. Damit die Module immer weiter verbessert werden können, wird am Schluss eine Evaluation durchgeführt.
Da die mathematische Modellierung während des kompletten Moduls eine wichtige Rolle spielt und immer präsent bleibt, wird im nachfolgenden Kapitel auf diese eingegangen.

2.2. Mathematisches Modellieren

Mathematisches Modellieren hängt mit fasst allen Lebensbereichen zusammen. Tagtäglich werden Produkte verwendet, bei deren Herstellung mathematische Modellierung benötigt wurde oder die nur aufgrund von mathematischer Modellierung funktionieren (vgl. Maaß, 2012, S. 8). Ein Alltagsbeispiel ist Erstellung von Animationsfilmen. Ebenso wird mathematische Modellierung auch in der Finanzindustrie, bei Ticketpreisen und Baukonstruktionen verwendet. Es gibt kaum eine Disziplin in den Naturwissenschaften oder im Ingenieurwesen, die keine mathematische Modellierung verwendet.

2.2.1. Ein Modell

„Ein Modell ist eine vereinfachende Darstellung des realen Sachverhalts, das nur gewisse, für die jeweilige Fragestellung relevante Teilaspekte der Situation berücksichtigt“ (vgl. Maaß, 2007, S. 13).
Ein *Modell* ist also eine Abbildung oder Vereinfachung der Wirklichkeit, die sich meistens auf einen bestimmten Aspekt fokussiert, der möglichst realitätsgetreu abgebildet werden sollte (vgl. Hinrichs, 2008, S. 8). Bei der Vereinfachung muss darauf geachtet werden, dass sie nachvollziehbar ist. Zusätzlich sollte die betrachtete Situation so vereinfacht werden, dass das entstandene Modell mathematisiert werden kann (vgl. Blum et al., 2013, S. 12). Bei Vereinfachungen werden Teilaspekte so vernachlässigt oder abgeändert, dass dennoch der Aspekt, der modelliert werden soll, bestmöglich der Realität entspricht (vgl. Blum et al., 2013, S. 12).
Aus den oben genannten Gründen gibt es nicht „das eine Modell“ einer realen Situation. Je nachdem, wie vereinfacht wird, welche Annahmen getroffen werden oder welche Mathematik verwendet wird, kann eine Situation auf viele verschiedene Weisen mo-

delliert werden. Bei jedem Modell muss stets darauf geachtet werden, dass es in sich stimmig und zweckmäßig ist (vgl. Blum et al., 2013, S. 12). Das bedeutet, dass im Modell selbst keine Widersprüche auftreten dürfen. Mit der Zweckmäßigkeit ist gemeint, dass das Modell so gewählt wird, dass es zur Lösung der vorliegenden Problemstellung dient. Andernfalls sollten andere Vereinfachungen und Annahmen getroffen werden. Das bedeutet, dass verschiedene Problemstellungen zur gleichen Thematik zur Lösung durchaus unterschiedliche Modelle benötigen (vgl. Blum et al., 2013, S. 13).

2.2.2. Modellierungskompetenz

Dass die Bedeutung der mathematischen Modellierung zunimmt, zeigt die Tatsache, dass vor 1968 in mathematik-didaktischen Diskussionen kaum auf diese eingegangen wurde (vgl. Blum et al., 2013, S. 12). Seitdem hat der Stellenwert stark zugenommen, so dass mathematische Modellierung seit Mitte der neunziger Jahre Einzug in die Kernlehrpläne alles Bundesländer gefunden hat. So zählt die mathematische Modellierung zu einer der fünf prozessbezogenen Kompetenzen, die im Laufe der Schullaufbahn erworben bzw. ausgebaut werden sollen (vgl. KLP Mathematik Sek. II, S. 14f). Die mathematische *Modellierungskompetenz* ist die „Fähigkeit, die jeweils nötigen Prozessschritte beim Hin- und Herwechseln zwischen Realität und Mathematik problemadäquat auszuführen.“ (Blum et al., 2007).
Sowohl im Kernlehrplan für das Gymnasium - Sekundarstufe I (G8) in Nordrhein-Westfalen (vgl. KLP Mathematik Sek. I) - als auch in dem für die Sekundarstufe II (vgl. KLP Mathematik Sek. II) tritt das mathematische Modellieren auf. Im Letzteren wird der Modellierungsprozess in die drei Schritte *Strukturieren, Mathematisieren* und *Validieren* unterteilt. Das bedeutet konkreter, dass die SuS reale Situationen als mathematische Modelle darstellen können sollen. Sie müssen also Sachsituationen strukturieren. Dazu gehört, dass sie Annahmen und Vereinfachungen treffen müssen (vgl. KLP Mathematik Sek. II, S. 18). Sie sollen außerdem in der Lage sein, Fragestellungen mathematisch zu lösen. Dafür müssen sie die Situation mathematisieren, indem sie ihre mathematischen Kenntnisse nutzen und Gleichungen aufstellen, die das Model beschreiben. Diese Gleichungen müssen sie lösen, indem sie bekannte Lösungsalgorithmen verwenden. Zusätzlich müssen sie mathematische Ergebnisse in Bezug auf eine reale Situation interpretieren können (vgl. Maaß, 2007, S. 16). Zuletzt gehört zur Modellierungskompetenz der Schritt der Validierung des Ergebnisses. Das bedeutet, dass die Lösung auf Angemessenheit geprüft wird und gegebenenfalls neue/verbesserte Modelle aufgestellt werden (vgl. KLP Mathematik Sek. II, S. 19).
Gerade diese Schritte, die SuS im Laufe der Schullaufbahn lernen sollen, finden sich im mathematischen Modellierungskreislauf wieder, welcher im nächsten Unterkapitel thematisiert wird. Dabei werden die Schritte teilweise noch einmal unterteilt.

2.2.3. Der Modellierungskreislauf und die Modellierungsspirale

Wird eine komplexe Problemstellung mit Hilfe der mathematischen Modellierung bearbeitet, so wird dieser Prozess häufig durch einen Modellierungskreislauf veranschau-

licht. Dieser kann aus verschieden vielen Schritten bestehen, da verschiedene Versionen dieses Kreislaufs existieren.
Eine detaillierte Version liefert der sieben-schrittige Modellierungskreislauf von Blum (siehe Abbildung 1), welcher hier kurz vorgestellt wird, da er durch eine weitere Aufteilung von drei Schritten, die kognitiven Prozesse, die SuS beim mathematischen Modellieren durchlaufen müssen, gut veranschaulicht.

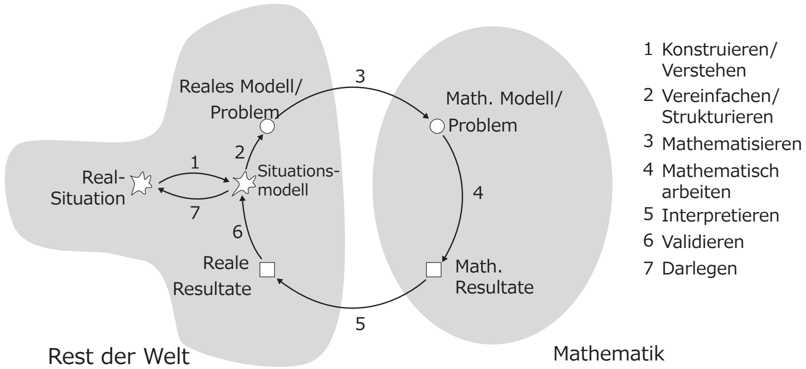


Abbildung 1: Siebenschrittiger Modellierungskreislauf von Blum (vgl. Blum et al., 2013, S. 18)

Der Kreislauf startet mit der realen Situation, welche zu Beginn verstanden werden muss. Das heißt, dass klar werden muss, was die Problemstellung überhaupt aussagt. Es muss gefragt werden: „Was muss bestimmt werden?“ Zusätzlich wird im diesem Schritt klar, welche Informationen dem Problem zugrunde liegen und ob diese fehlerbehaftet sind. Darüber hinaus sollte geklärt werden, ob es wichtige zu beachtende Nebenbedingungen gibt. Beispielsweise kann die Durchlaufzeit des Programms vorgegeben sein, da das Ergebnis innerhalb weniger Sekunden vorliegen muss, oder es liegt nur ein bestimmtes Budget vor, welches nicht überschritten werden darf.
Nachdem diese grundlegenden Fragen beantwortet wurden, muss die reale Situation vereinfacht werden, da diese meist zu komplex ist, um sie direkt von Anfang an in jeglicher Hinsicht korrekt zu beschreiben. Hierfür wird die reale Situation zunächst *abstrahiert*, indem bestimmte Eigenschaften weggelassen werden (vgl. Barzel, Elschenbroich et al., 2011, S. 157). Es handelt sich also um Vereinfachungen, die zu einer Veränderung des Modells führen, damit es einfacher zu beschreiben ist. Zusätzlich wird die reale Situation in diesem Schritt *idealisiert*, indem ausgewählte Eigenschaften angenommen und hinzugefügt werden (vgl. Barzel, Elschenbroich et al., 2011, S. 157). Dadurch werden zusätzliche Daten durch überlegte Vermutungen dazugewonnen. In Bezug auf das Abstrahieren und Idealisieren soll schon Einstein gesagt haben: „Modelle sollten so einfach wie möglich, aber nicht einfacher sein!“ (Noack, o. J.). Wird ein Modell nämlich zu sehr vereinfacht, so entspricht es nicht mehr ausreichend der realen Situation, was dazu führt, dass die Ergebnisse keine Aussagen über die ursprüngliche Situation geben.
Die vereinfachte Situation muss nun *mathematisiert* werden, was bedeutet, dass das

Modell in ein mathematisches Problem übersetzt werden muss. Dabei muss alles berücksichtigt werden, was zum vereinfachten Modell beiträgt (vgl. Barzel, Elschenbroich et al., 2011, S. 157). Das heißt, dass alle Annahmen, Vereinfachungen, Nebenbedingungen und Daten, die im vorherigen Schritt ausgewählt wurden, in das mathematische Problem einfließen müssen und aus der Alltagssprache in die Sprache der Mathematik übersetzt werden (vgl. Maaß, 2007, S. 14). Der Schritt ist beendet, sobald klar ist, wie das Problem gelöst werden kann und durch welche Formeln die vereinfachte Situation beschrieben wird.
Der nächste Schritt beschäftigt sich mit dem mathematischen Arbeiten. Für diesen Schritt wird meistens eine Software verwendet, da nur die wenigsten Probleme mit Stift und Papier gelöst werden können. Bei diesen Sonderfällen handelt es sich um Probleme mit einfachen Geometrien oder Probleme ohne komplexe Phänomene, wie bspw. chemische Reaktionen oder zeitliche Veränderungen. Ist eine einfache, analytische Berechnung nicht möglich, so wird auf die numerische Berechnung zurückgegriffen. Dafür werden die erarbeiteten Formeln bzw. der Code in die Software eingegeben, welche nach dem Durchlaufen ein mathematisches Ergebnis liefert (vgl. Maaß, 2007, S. 14).
Die mathematischen Resultate werden im Schritt *Interpretieren* in Bezug auf die reale Situation interpretiert (vgl. Barzel, Elschenbroich et al., 2011, S. 157). Das heißt, dass die Bedeutung des Ergebnisses in der realen Situation herausgefunden wird. Zusätzlich wird im nächsten Schritt ermittelt, ob die vorhandene Lösung mit den gegebenen Daten und Annahmen konsistent ist. Dafür muss geprüft werden, ob die Lösung alle vorhandenen Bedingungen erfüllt und ob sich die Lösung wie erwartet verändert, wenn vorhandene Parameter variiert werden (vgl. Blum et al., 2013, S. 19).
Zuletzt wird die Lösung vermittelt, indem die ursprüngliche Problemstellung beantwortet wird. Diese letzten drei Schritte können auch in einen einzigen übergeordneten Schritt zusammengefasst werden. So wird es im Modellierungskreislauf von Hertz (vgl. Ortlieb, o. J., S. 4) und dem von Leuders et al. (vgl. Barzel, Elschenbroich et al., 2011, S. 57) getan.
Die Vorstellung des Modellierungskreislaufes verfolgt das Ziel, den SuS ihre Modellierarbeit auf der Metaebene verständlich zu machen. Bei CAMMP wird hierfür der vierschrittige Modellierungskreislauf verwendet (siehe Abbildung 2), welcher im Wesentlichen dem frühen vierschrittigen Modellierungskreislauf von Blum entspricht (vgl. Blum et al., 2013, S. 17).
Es passiert selten, dass der Modellierungskreislauf einmal durchlaufen wird und die Problemstellung zufriedenstellend bearbeitet wurde. Viel eher tritt der Fall ein, dass das Ergebnis nicht zufriedenstellend ist oder keine Lösung gefunden werden konnte. Ist Letzteres der Fall, so muss in jedem Schritt erneut überlegt werden, ob ein Fehler unterlaufen ist (vgl. Maaß, 2007, S. 15). Dies kann in allen Schritten der Fall sein. Liegt ein Ergebnis vor, welches nur nicht ausreichend präzise ist, so muss der Kreislauf zur Modellverbesserung / Modellverfeinerung erneut durchlaufen werden. Dazu werden die Annahmen überprüft oder es wird geschaut, ob Vereinfachungen das Modell zu stark verändert haben. Zusätzlich können Vereinfachungen verworfen werden, falls ein Aspekt des Modells im nächsten Durchlauf des Kreislaufs komplett berücksich-

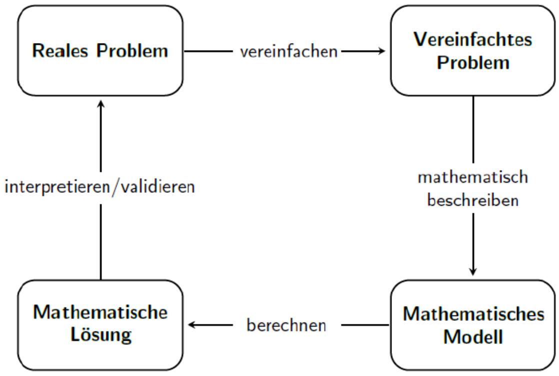


Abbildung 2: Modellierungskreislauf des Schülerlabors CAMMP

tigt werden soll. Darüber hinaus müssen die Forderungen und Bedingungen überdacht werden.

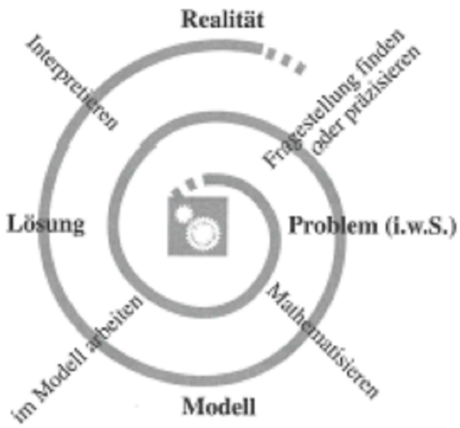


Abbildung 3: Modellierungsspirale von Büchter und Leuders (vgl. Büchter & Leuders, 2011, S. 77)

Büchter und Leuders (vgl. Büchter & Leuders, 2011, S. 77) argumentieren, dass jeder Durchlauf durch den mathematischen Kreislauf das Verständnis der Problemstellung vergrößert und die Kenntnis über das Problem wächst (siehe Abbildung 3). Aus diesem Grund fassen sie die mathematische Modellierung nicht als Kreislauf, sondern als eine Spirale auf, da diese wachsende Komponente des Problemverständnisses so dazugenommen wird (vgl. Büchter & Leuders, 2011, S. 77). Diese wachsende Komponente wird durch die sich nach außen ausbreitende Spirale dargestellt (siehe Abbildung 3).
Auch Vorhölter spricht von einer Modellierungsspirale (vgl. Vorhölter, 2009, S. 44). Sie begründet dies dadurch, dass mit jedem Durchlauf des Modellierungskreislaufs das entwickelte Modell komplexer wird. Dabei kann die Komplexität des Modells durch eine dritte Komponente (z-Achse) veranschaulicht werden.
Diesen Gedanken der Modellierungsspirale nutzend, erstellte CAMMP ebenfalls eine Modellierungsspirale, jedoch mit einer anderen Bedeutung als Büchter und Leuders

(siehe Abbildung 4). Die Idee knüpft eher an das Verständnis der Modellierungsspirale nach Vorhölter an und ist auch bei der ‚computer based math community' (vgl. *The Maths Process Poster - Applying the CBM Solution Helix of Maths*, 2017) wiederzufinden. Die Spirale von CAMMP soll verdeutlichen, dass sich die Lösung durch jeden Durchlauf verbessert. Das heißt, dass sich die Lösung einer optimalen Lösung annähert, wobei diese nie vollständig, allumfassend erreicht werden kann, da sie unendlich weit entfernt ist. Das Annähern an eine optimale Lösung wird durch die enger werdende Spirale verdeutlicht:

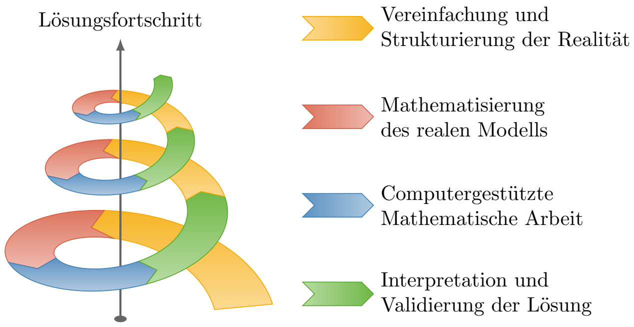


Abbildung 4: Modellierungsspirale des Schülerlabors CAMMP

2.3. Drei Repräsentationsformen nach Bruner

Arbeitet eine Gruppe von SuS an einem gleichen Thema, so ist zu berücksichtigen, dass es verschiedene Lerntypen gibt, die anhand verschiedener Repräsentationsformen verschieden erfolgreich lernen können. Aus diesem Grund unterscheidet Bruner laut Barzel et al. (vgl. Barzel, Elschenbroich et al., 2011, S. 186f) zwischen drei verschiedene Darstellungsformen zur Begriffsbildung:
Enaktiv bedeutet, dass das Erschließen von Wissen durch eine Handlung geschieht. Erklärt am Satz von Pythagoras, könnte diese Darstellungsform mit Hilfe von SuS selbst angefertigten Zeichnungen oder das Auslegen einer Pythagorasform durch Einheitsquadrate umgesetzt werden.
Die *ikonische* Darstellungsweise meint eine Veranschaulichung durch Bilder, Videos oder Ähnlichem. Wird der Satz des Pythagoras anhand eines Bildes, in welchem die Gesetzmäßigkeit anhand der Quadrate der Seitenlänge gezeigt wird, veranschaulicht, entspricht dies der ikonischen Ebene.
Die letzte Darstellungsform bildet die *symbolische* Repräsentationsform. Sie ist beschrieben durch das Erschließen von Wissen anhand von Zeichen und Sprache. Sie wird am häufigsten verwendet, da sowohl schriftliche als auch mündliche Sprache dazu gehören. Übertragen auf den Satz des Pythagoras, kann diese Ebene anhand einer Formel und mündlichen Definition umgesetzt werden.
Im Unterricht bzw. bei der Entwicklung von Materialien für SuS sollte somit darauf geachtet werden, dass möglichst alle drei Repräsentationsformen umgesetzt und berücksichtigt werden. Üblicherweise wird die enaktive Ebene am wenigsten verwendet

(vgl. Barzel, Elschenbroich et al., 2011, S. 186).

2.4. Das Prinzip der minimalen Hilfe

Arbeiten SuS an Problemstellungen sollten die SuS so lange selbstständig arbeiten bis sie nicht weiter kommen. Diese Vorgehensweise wird von Aebli das *Prinzip der minimalen Hilfe* genannt (vgl. Aebli, 2006, S. 300). Das bedeutet, dass der Arbeitsprozess der SuS, wenn möglich, nicht gestört werden sollte. Gelangen die SuS an einen Punkt an dem sie tatsächlich nicht weiter kommen und sie Hilfe benötigen, sollte beachtet werden, dass nur so wenig Hilfe wie nötig gegeben wird. So sollen keine massive Hilfen oder gar schon Lösungen vorgegeben werden. Zunächst sollten lediglich kleine Hilfen gegeben werden.
Würde direkt zu umfangreichen Hilfen gegriffen werden, so würden eventuell Schritte oder Teillösungen vorgegeben die die Schülerin / der Schüler sich selbst hätte erschließen können. Zudem kann diese Art des Vorgehens dazu führen, dass die Schülerin / der Schüler sich nicht ernst genommen fühlt, da ihr / ihm zu sehr geholfen wird, was dazu führen kann, dass sie / er weniger leistet als sie / er könnte (vgl. Aebli, 2006, S. 300).

3. Mathematischer und theoretischer Hintergrund

„Animation“ ist ein weit gefasster Begriff. Er umfasst alles, was eine durch viele Einzelbilder dargestellte Bewegung zeigt. Das menschliche Auge und Gehirn benötigt, damit eine Abfolge von Bildern als eine flüssige Bewegung wahrgenommen wird, ungefähr 25 Bilder pro Sekunde (Landesmedienzentrum Baden-Württemberg, o. J.). Somit besteht ein Film, der 90 Minuten lang ist, aus mindestens 135000 Einzelbildern.
Animationsfilme kennen viele aus ihrem Alltag. Dass diese aus vielen aufeinander folgenden Bildern bestehen, ist auch bekannt. Damit beim Produzieren des Films nicht Millionen von Bildern erstellt werden müssen, versucht man, die Anzahl der Bilder zu minimieren und reduziert sie auf Hauptbilder, auch Keyframes genannt. Keyframes sind die für eine Bewegung ausschlaggebenden Bilder. Um aus den einzelnen Bildern einen Film zu erstellen, wird Mathematik verwendet, die im nachfolgendem Kapitel detailliert erläutert wird.
Die vorgestellte Mathematik dient den Dozenten, die den CAMMP day durchführen als Grundlage. Zudem folgt die Struktur und die Abfolge der behandelten Inhalte der Struktur des CAMMP days.

3.1. Die Geschichte von Animationsfilmen

Im Jahr 1914 wurde der erste Zeichentrickfilm „Gertie the Trained Dinosaur“ gedreht, welcher aus insgesamt 10000 Bildern bestand. Um die Produktion zu erleichtern, entwickelte Earl Hurd die Cel Animation (vgl. Jackèl et al., 2006, S. 1). Dabei werden Bilder aus einem Vorder- und einem Hintergrundbild zusammengesetzt, so dass nicht jedes Mal der Hintergrund neu gemalt werden muss (siehe Abbilung 5). Im Jahr 1916 wurde das erste Mal ein Charakter mit einer Persönlichkeit animiert und im Jahr 1928 der erste „Mickey Mouse“-Film gedreht. Die folgenden Jahr dienten der Arbeit farbige Animationen zu erstellen, welche zusätzlich noch am Rechner angefertigt wurden. In diesem Zuge wurde 1974 das „Key-Framing“-Verfahren entwickelt. Hierbei wird die Anzahl der benötigten Bilder reduziert, indem die Bewegungen durch einzelne ausschlaggebende Bilder, sogenannten Keyframes, vorgegeben wird (vgl. Jackèl et al., 2006, S. 2ff.). Diese werden von Hauptzeichnern gezeichnet und durch Interframes ergänzt, die von anderen Zeichnern angefertigt und zwischen die Keyframes eingefügt werden, so dass flüssige Bewegungen entstehen. Das Key-Framing wird im entwickelten Lernmodul behandelt: Hierbei übernimmt der Computer das ‚Zeichnen‘ der Interframes, indem er

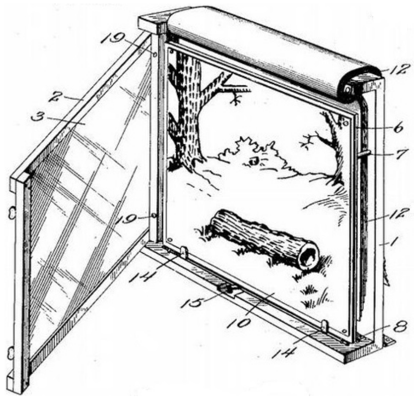


Abbildung 5: Verwendeter Aufbau bei der Cel Animation (*Erkunde Animation und noch mehr!*, o. J.)

zwischen den Keyframes interpoliert (s. Kapitel 3.2).
Von 1980 - 1982 wurde der erste Spielfilm „Tron“, welcher aus einer Mischung von realen Schauspielern und animierten Objekten bestand, gedreht. Auf Grund der hohen Produktionskosten und des geringen Erfolgs erlitt die Welt der Computeranimation jedoch einen Rückschlag (vgl. Jackèl et al., 2006, S. 5). Computeranimationen wurden nur für kurze Szenen eingesetzt. Bereits in der zweiten Hälfte der achtziger Jahre erhielt die Computeranimation jedoch einen riesigen Schub, so dass im Jahr 1995 „Toy Story“ für drei Oskars nominiert wurde (vgl. Jackèl et al., 2006, S. 5). Inzwischen ist es sogar möglich, ganze Objekte, Menschen oder Tiere nur durch Computer zu animieren. Dies macht es schwierig, zwischen realen und animierten Personen und Gegenständen zu unterscheiden.

3.2. Interpolation

„Allgemein besteht das Interpolationsproblem darin, zu einer Funktion, die [...] nur an diskreten Stellen bekannt ist, eine einfache Funktion zu finden, die mit der gesuchten Funktion an den besagten Stellen übereinstimmt und sich ansonsten an beliebigen Zwischenstellen auswerten lässt.“ (vgl. Dahmen & Reusken, 2006, S. 266). Das heißt, die Aufgabe der Interpolation ist es, Punkte so zu verbinden, dass die daraus entstehende Funktion möglichst genau der gesuchten Funktion entspricht. Übersetzt auf die Anwendung der Animation bedeutet dies, aus den vorgegebenen Keyframes eine sinnvolle und glaubwürdige Bewegung zu erzeugen. Dabei werden die Keyframes interpoliert, indem eine Funktion zwischen einzelne Punkte der Keyframes gelegt wird, welche die Bewegung beschreibt.
Aus folgenden drei Gründen wird im Verlauf der Arbeit immer wieder das Beispiel eines springenden Balles verwendet: Zum einen kennt jeder die Bewegung eines springenden Balles. Zudem lässt sie sich leicht vorführen und mehrfach wiederholen. Ein weiterer Grund ist, dass aufgrund der Schlichtheit der Bewegung die Wahl der Keyframes leicht nachvollzogen bzw. die Keyframes selbst erkannt werden können. Zuletzt wird die Bewegung des Balles im folgenden Kapitel als Anwendung verwendet, da es sich bei dieser um die reale Situation handelt, die im erarbeiteten Lernmodul modelliert werden soll.
Für die Animation der Bewegung eines springenden Balles liegen acht Keyframes vor, die auf verschiedene Weisen interpoliert werden sollen. Ziel ist es, herauszufinden, durch welche Interpolationsart die Bewegung eines Balles am naturgetreusten beschrieben werden kann.
Die Funktion, die durch die Punkte gelegt wird, kann zunächst beliebig aussehen, weshalb Einschränkungen an diese gegeben werden müssen.

Definition 3.1 *Gegeben sei eine Funktion Φ in einer Variablen x, die von weiteren $n+1$ Parametern $a_0, \dots, a_n$ abhängt. Man spricht von einem* ***Interpolationsproblem*** *für Φ, wenn die $a_0, \dots, a_n$ so bestimmt werden sollen, dass $\Phi(x_i; a_0, \dots, a_n) = f_i, \forall i = 0, \dots, n$. Dabei sind $(x_i, f_i), \forall i = 0, \dots, n$ mit $x_i \neq x_k$ für $i \neq k$ Wertepaare,* *auch Stützpunkte genannt (vgl. Stoer, 2000, S. 41).*

Wie zwei Bilder interpoliert werden müssen, hängt von der Art der Bewegung ab, die dargestellt werden soll. In dem erarbeiteten Workshop wird ein springender Ball betrachtet (siehe Abbildung 6) für den folgende Keyframes definiert werden:

$$P_i(t_i|h_i), \quad i = 1, \ldots, 8.$$

Dabei bezeichnen die t_i die Zeitpunkte der Keyframes und h_i die Höhen, an denen der Ball sich zu den Zeitpunkten befinden.

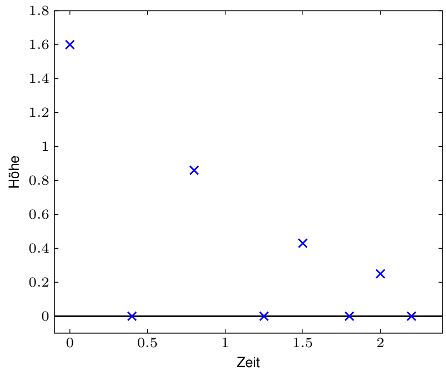


Abbildung 6: Vorgegebene Keyframes für einen springenden Ball als Grundlage für die Interpolation mit der Zeit in Sekunden und der Höhe in Metern

3.2.1. Lineare Interpolation

In der Schule lernen SuS in der siebten Klasse die erste formale Funktion kennen, nämlich die lineare Funktion. Im Laufe der nächsten Jahre erweitern sie ihr Wissen um Polynome zweiten und später noch höheren Grades. Aus diesem Grund sollte es aus Sicht der SuS am einfachsten sein, zwei Bilder bzw. zwei Punkte durch eine Gerade miteinander zu verbinden. In der Mathematik wird dies als lineare Interpolation bezeichnet.

Definition 3.2 *Werden jeweils zwei benachbarte Punkte* (x_i, f_i) *und* $(x_{i+1}, f_{i+1}), \forall i = 0, \ldots, n-1$ *durch eine Gerade miteinander verbunden, spricht man von linearer Interpolation. Dabei gilt für* $x_i < x < x_{i+1}$*:*

$$\Phi(x) = \tfrac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot \Phi(x_{i+1}) + \tfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \cdot \Phi(x_i).$$

Im Falle des springenden Balles ergibt die lineare Interpolation der Keyframes folgende Abbildung (vgl. Abbildung 7):

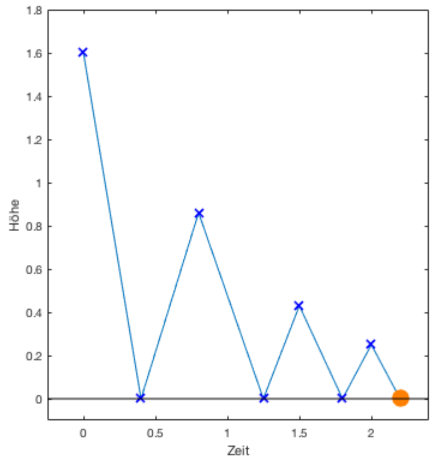


Abbildung 7: Lineare Interpolation am Beispiel des springenden Balles

Zur Erstellung werden die einzelnen Keyframes durch $P_i(t_i|h_i)$ bezeichnet. Die Animation wird durch die folgende Gleichung erzeugt:

$$hp(k) = h_{i+1} \cdot \frac{tp(k) - t_i}{t_{i+1} - t_i} + h_i \cdot \frac{t_{i+1} - tp(k)}{t_{i+1} - t_i}$$

Durch die Gleichung lassen sich alle Punkte $P(tp|hp)$ bestimmen. Der Schüler-Code in MATLAB durchläuft dafür eine for-Schleife (siehe Codeabschnitt unten), weshalb zusätzlich zur Laufvariablen i eine zweite, nämlich k, benötigt wird. Dabei wird die Länge des Intervalls $t_{i+1} - t_i$ zwischen den Punkten t_i und t_{i+1} mit einer Zahl $fps = 50$ multipliziert, wodurch die Zahl *speed* definiert wird. Das Intervall zwischen t_i und t_{i+1} wird daraufhin in *speed* viele Teilintervalle unterteilt. Durch die Schleife wertet MATLAB die Geradengleichung an jeder der Übergänge zwischen den Teilintervallen aus und verbindet sie linear miteinander.

```
fps = 50;
speed = (t(i+1)-t(i))*fps;
xp=linspace(t(i),t(i+1),speed);
für k von 1 bis speed sei
  yp(k)=hp ausgewertet bei i, k und xp
end
```

Meistens liefert die lineare Interpolation eine gute Näherung. Werden viele nah beieinander liegende Keyframes betrachtet, was den Sinn der Keyframes verfehlt, oder eine geradlinige Bewegung, bietet sich diese Interpolationsart an. Dass sie jedoch, bei der vorliegenden Wahl der Keyframes, im Fall der Animation eines springenden Balles nicht genau genug ist, zeigt Abbildung 7. Würde die Graphik einen springenden Ball darstellen, so hieße das, dass der Ball die ganze Zeit beschleunigt wird. Dies ist jedoch in der Realität nicht der Fall. Zu beobachten ist, dass der Ball aufgrund der Erdanziehungskraft Richtung Tiefpunkt schneller und Richtung Hochpunkt langsamer wird. Dies bedeutet, dass die Steigung Richtung Boden zunehmen und Richtung Hochpunkt abnehmen müsste.

Aus diesem Grund wird die nächste naheliegende Möglichkeit, Punkte zu interpolieren, betrachtet.

3.2.2. Interpolation durch Polynome mit Grad ≥ 2

Den häufig im Schulunterricht verfolgten Ansatz reale Phänomene durch einzelne geschlossene Funktionen zu beschreiben folgend, wird in diesem Abschnitt eine Interpolation der Polynome von Grad ≥ 2 versucht.
Hierbei wird durch alle betrachteten Stützpunkte ein einziges Polynom mit Grad ≥ 2 gelegt. Die Problemstellung für eine solche Situation lautet:

Aufgabe 3.1 *Es seien $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ mit $n \geq 1$ paarweise verschiedene Stützstellen. Finde zu den Daten $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ ein Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit*

$$P_n(x_j) = f(x_j), \qquad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Hierbei bezeichnet Π_n die Menge der Polynome mit $\Phi = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, welche den Grad n haben (vgl. Stoer, 2000, S. 42).
*Solche Probleme werden **Lagrange-Polynominterpolation** genannt (vgl. Dahmen & Reusken, 2006, S. 268).*

Zur Bestimmung der Lösung werden unter anderem die Lagrange-Fundamentalpolynome benötigt, die im Folgenden definiert werden:

Definition 3.3 *Die Lagrange-Fundamentalpolynome ℓ_{jn}, $j = 0, \ldots, n$ sind für $n \geq 1$ gegeben durch*

$$\ell_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Für $n = 0$ wird $\ell_{j0}(x) = 1$ gesetzt (vgl. Frank, 2017, S. 1).

Mit Hilfe dieser Polynome lässt sich folgender Satz, angelehnt an Dahmen und Reusken (vgl. Dahmen & Reusken, 2006, S. 268), formulieren:

Satz 3.1 *Das Problem der Lagrange-Interpolation ist eindeutig lösbar. Das heißt, dass zu beliebigen Daten $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ ein eindeutiges Polynom $P_n \in \Pi_n$ existiert, für welches*

$$P_n(x_j) = f(x_j), \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

gilt. Insbesondere lässt sich $P_n(x)$ explizit mit Hilfe der Lagrange-Fundamentalpolynome darstellen:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \cdot \ell_{jn}(x). \tag{1}$$

Der Beweis der eindeutigen Lösbarkeit lehnt sich an den von Stoer (vgl. Stoer, 2000, S. 43) an:

Beweis 3.1 *Begonnen wird mit der Eindeutigkeit der Lösung:*
Es wird angenommen, dass es zwei verschiedene Polynome P_1 und P_2 mit $P_1, P_2 \in \Pi_n$ gibt, für die für alle Stützstellen $x_j, j = 0, \ldots, n$ gilt, dass

$$P_1(x_j) = P_2(x_j) = f(x_j), \qquad j = 0, \ldots, n.$$

Das Polynom, das sich aus der Differenz ergibt, $P := P_1 - P_2 \in \Pi_n$, hat maximal den Grad n (vgl. Krieg, 2007, S. 23). Zudem hat P $n+1$ verschiedene Nullstellen, da die P_1 und P_2 bei allen $x_j, j = 0, \ldots, n$ übereinstimmen. Das bedeutet, dass $P_1 \equiv P_2$.
Im zweiten Schritt wird gezeigt, dass ein solches Polynom immer existiert:
Die Lagrange-Fundamentalpolynome $\ell_{jn}(x_i), i, j = 0, \ldots, n$ sind gerade so konstruiert, dass sie folgende Eigenschaft haben:

$$\ell_{jn}(x_i) = \delta_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = j, \\ 0, & \text{wenn } i \neq j. \end{cases}$$

Das bedeutet, dass sobald $i \neq j$ ist, $\ell_{ij} = 0$ ist. Das führt dazu, dass bei Produkten mit ℓ_{ij} das Produkt gleich Null ist. Mit Hilfe der Lagrange-Fundamentalpolynome kann somit das gesuchte Polynom direkt angegeben werden:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j \cdot \ell_{jn}(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

□

Zur Bestimmung eines Funktionswertes, welcher nicht einem der Stützstellen $x_j, j = 0, \ldots, n$ entspricht, werden üblicher Weise zwei verschiedene Verfahren verwendet: Das Neville-Aitken-Schema und die Newtonsche Interpolationsformel. Sie gehen über die Schulinhalte hinaus, weshalb an dieser Stelle nicht weiter auf sie eingegangen wird. Möglicherweise lassen diese sich in längeren Projektwochen mit SuS jedoch trotzdem diskutieren.

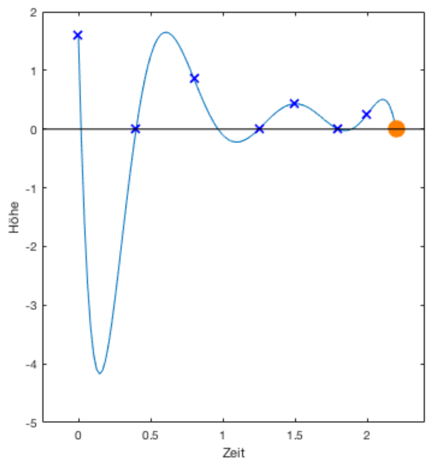


Abbildung 8: Polynominterpolation am Beispiel des springenden Balles

Die Polynominterpolation soll nun am (bereits im Kapitel 3.2 eingeführten) Beispiel des springenden Balles genauer vorgestellt werden. Eine Möglichkeit bestünde darin, die vorliegenden acht Keframes über die Verwendung der Lagrange-Fundamentalpolynome mit Gleichung (1) miteinander zu verbinden. Im Lernmodul wird eine Alternative verwendet, welche den SuS aus der Schulmathematik bekannt sein sollte. Durch die acht Keyframes wird ein Polynom siebten Grades gelegt (siehe Abbildung 8). Dazu können acht Gleichungen aufgestellt werden, damit die Koeffizienten bestimmt werden können. Da es sich um eine Gleichung siebten Grades handelt, ergibt sich folgende allgemeingültige Gleichung als Grundlage für das Gleichungssystem:

$$y = c \cdot x^7 + d \cdot x^6 + e \cdot x^5 + f \cdot x^4 + g \cdot x^3 + h \cdot x^2 + l \cdot x + m.$$

Das dem obigen Graphen (siehe Abbildung 8) zu Grunde liegende Gleichungssystem lautet somit:

$$h_i \quad = \quad \sum_{j=0}^{7} a_j \cdot t_i^j, \quad i = 1, \ldots, 8.$$

Die dargestellte Bewegung kann nicht der eines springenden Balles entsprechen, da der Ball in der Animation über 4 m in den Boden eindringt und er nach dem Loslassen erneut die gleiche Höhe von $1,6$ m erreicht. Dies dürfte aufgrund von Verformungen und Reibung nicht geschehen. Nach dem letzten Aufprallen auf dem Boden springt der Ball sogar über die vorherige, zuletzt erreichte Höhe hinaus.
Beschäftigt man sich das erste Mal mit der Polynominterpolation, könnte es sein, dass die Vermutung aufkommt, dass die Polynominterpolation bei der Hinzunahme weiterer Keyframes weniger starke Ausschläge aufweist.
Dass sich die Polynominterpolation für eine steigende Anzahl von Keyframes nicht dem gewünschten Graph annähert, sondern im Gegenteil der Graph noch größere Ausschläge aufweist, soll hier ein kleines Beispiel erläutert werden:
Das dafür notwendige Polynom ist ein Polynom neunten Grades:

$$y = a \cdot x^9 + b \cdot x^8 + c \cdot x^7 + d \cdot x^6 + e \cdot x^5 + f \cdot x^4 + g \cdot x^3 + h \cdot x^2 + l \cdot x + m$$

Für die Erstellung der Animation wird das obige Gleichungssystem um zwei Gleichungen erweitert.

$$h_i \quad = \quad \sum_{j=0}^{9} a_j \cdot t_i^j, \quad i = 1, \ldots, 10$$

Dadurch entsteht der Graph aus Abbildung 9. Dies entspricht noch immer nicht einem adäquaten Modell zur Animation eines springenden Balles, da der Ball über 35 m in den Boden eindringt und anschließend eine größere Höhe erreicht, als die, bei der er losgelassen wurde. Aus diesem Grund wird eine weitere Interpolationsmöglichkeit betrachtet.

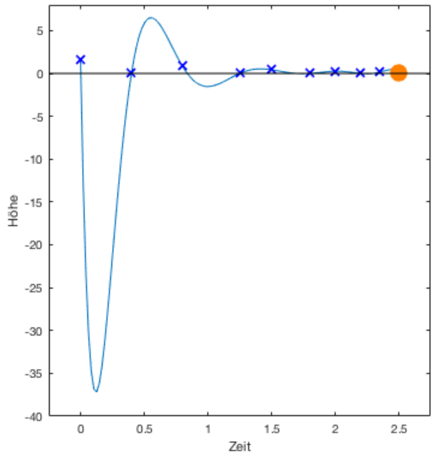


Abbildung 9: Polynominterpolation am Beispiel des springenden Balles mit zehn Keyframes

3.2.3. Splines

Um genau diese Oszillationen der obigen Polynome zu vermeiden, wurden Splines entwickelt. Dabei handelt es sich um Polynome, die zwischen jeweils zwei Punkte gelegt werden. Im Folgenden werden ausschließlich kubische Splines betrachtet. Das bedeutet, dass zur Interpolation Polynome dritten Grades verwendet werden.
Es wird das Intervall $[a, b]$ betrachtet, welches unterteilt wird durch

$$\Delta := a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

.

Aufgabe 3.2 *(vgl. Dahmen & Reusken, 2006, S. 294f) Seien* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ *$n+1$ verschiedene Stützstellen mit den Daten* $f_j, j = 0, 1, \ldots, n$. S_3^n *bezeichnet den Raum der kubischen Splines mit* $S_3^n := g \in C^2([a, b])|g_{[x_i, x_{i+1}]} \in \Pi_3, i = 0, 1, \ldots, n-1$. *Hierbei ist Π_3 wieder die Menge der Polynome mit Grad 3 und $C^2([a, b])$ bezeichnet die Menge der auf $[a, b]$ zweimal stetig differenzierbarer Funktionen. Finde zu diesen Daten eine Funktion $S_\Delta \in S_3^n$, für die gilt*

$$S_\Delta(x_j) = f_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Eine Splinefunktion ist so aus kubischen Polynomen zusammengesetzt, dass sie an den Übergängen keine Sprungstellen und keine Knicke aufweist, da sie dort stetig differenzierbar sein muss.
Durch die oben angegebenen Bedingungen in Aufgabe 3.2 sind noch nicht genug Bedingungen gegeben, so dass die entstehende Splinefunktion nicht eindeutig wäre.

> *In jedes Intervall wird ein kubisches Polynom gelegt, welches vier Unbekannte hat, und es gibt n Intervalle. Das heißt, dass es $4n$ Unbekannte gibt.*

Durch die Aufgabe werden die Daten der Stützpunkte vorgegeben. Seien $s_j, j = 0, 1, \ldots, n-1$ *die kubischen Polynome auf den Teilintervallen* $[x_j, x_{j+1}]$. *Für diese muss gelten*

$$s_j(x_j) = f_j = y_j \qquad \textit{und} \qquad s_j(x_{j+1}) = f_{j+1} = y_{j+1}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Somit werden $2n$ *Bedingungen vorgegeben. Dadurch, dass Splines zweimal stetig differenzierbar sein müssen, erhält man weitere* $2n - 2$ *Bedingungen, da Folgendes für die inneren Stützstellen erfüllt sein muss:*

$$s'_j(x_j) = s'_{j+1}(x_j) \qquad \textit{und} \qquad s''_j(x_j) = s''_{j+1}(x_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Das bedeutet, dass zwei Bedingungen fehlen und noch zwei weitere Bedingungen hinzugefügt werden müssen, um die Splines eindeutig bestimmen zu können. Übliche Einschränkungen sind die folgenden drei (vgl. Stoer, 2000, S. 105) und (vgl. Frank, 2017, S. 35):

- $S''_\Delta(a) = S''_\Delta(b) = 0$, genannt „natürliche Endbedingung",
- $S^{(k)}_\Delta(a) = S^{(k)}_\Delta(b)$ für $k = 0, 1, 2$, dann ist $S_\Delta([a, b])$ periodisch, weshalb diese Bedingung die „periodische Randbedingung" genannt wird,
- $f'(a) = S'_\Delta(a), f'(b) = S'_\Delta(b)$, genannt „vollständige Randbedingung".

Auch hier muss wieder die Existenz und Eindeutigkeit bewiesen werden. Dieser Beweis lehnt sich an den von Stephan (vgl. Stephan, 2004, S. 2ff) an. Während des Beweises werden einige bestimmte Notationen verwendet, welche vorher gesammelt beschrieben werden:
Die Funktion $f(x)$ soll durch einen kubischen Spline interpoliert werden. Im Folgenden wird ein beliebiges, aber festes kubisches Polynom

$$s_j(x) = s(x), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1$$

betrachtet. s bezeichnet also das kubische Polynom auf dem j-ten Teilintervall, weshalb auch folgende Notationen verwendet werden können:

$$f_j = s(x_j), \qquad m_j = s'(x_j), \qquad M_j = s''(x_j), \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Bevor der Beweis wirklich begonnen wird, werden hier im Vorhinein einmal der Verlauf und die Hauptschritte des Beweises skizziert, um nachher im Laufe des Beweises eine Orientierung zu geben.
Um am Ende des Beweises alle n kubischen Splines eindeutig bestimmt zu haben, wird gezeigt, dass ein Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat. Um das benötigte Gleichungssystem zu bestimmen, werden folgende Schritte durchlaufen:

1. Entwicklung einer Schreibweise für die zweite Ableitung $s''(x)$ in Abhängigkeit von M_j und M_{j+1}.

2. Verwendung dieser Schreibweise zur Bestimmung von $s(x)$ über den Satz von Taylor.
3. Bestimmung der Ableitung $s'(x)$.
4. Betrachtung des davor liegenden Intervalls $[x_{j-1}, x_j]$ und die daraus resultierenden Gleichungen für $s(x)$ und $s'(x)$.
5. Bestimmung der Differenz von $\frac{s(x_{j+1})-s(x_j)}{h_j}$ und $\frac{s(x_j)-s(x_{j-1})}{h_{j-1}}$.

Beweis 3.2 *Da es sich bei $s(x)$ um kubische Polynome handelt, ist die zweite Ableitung eine lineare Funktion. Werden die obigen Bezeichnungen verwendet, ergibt dies für die zweite Ableitung Folgendes:*
Die Steigung r_j der Geraden lässt sich allgemein für $x \in [x_j, x_{j+1}], j = 0, 1, \ldots, n-1$ berechnen mit

$$r_j = \frac{s''(x_{j+1}) - s''(x_j)}{x_{j+1} - x_j}.$$

Durch Einsetzen von Punkt $P_j(x_j|s''(x_j))$ in die Geradengleichung erhält man den y-Achsenabschnitt n_j:

$$s''(x_j) = r_j \cdot x_j + n_j \qquad \Leftrightarrow \qquad n_j = s''(x_j) - r_j \cdot x_j$$

Die zweite Ableitung des kubischen Polynoms ist somit gegeben durch:

$$\begin{aligned}
s''(x) &= \underbrace{\frac{s''(x_{j+1}) - s''(x_j)}{x_{j+1} - x_j}}_{r_j} \cdot x + \underbrace{s''(x_j) - \frac{s''(x_{j+1}) - s''(x_j)}{x_{j+1} - x_j} \cdot x_j}_{n_j} \\
&= \frac{(s''(x_{j+1}) - s''(x_j)) \cdot x + s''(x_j) \cdot (x_{j+1} - x_j) - (s''(x_{j+1}) - s''(x_j)) \cdot x_j}{x_{j+1} - x_j} \\
&= \frac{s''(x_{j+1}) \cdot x - s''(x_j) \cdot x + s''(x_j) \cdot x_{j+1} - \cancel{s''(x_j) \cdot x_j} - s''(x_{j+1}) \cdot x_j + \cancel{s''(x_j) \cdot x_j}}{x_{j+1} - x_j} \\
&= s''(x_{j+1}) \cdot \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} + s''(x_j) \cdot \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \\
&\overset{s''(x_j)=M_j}{=} M_{j+1} \cdot \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} + M_j \cdot \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, \qquad x \in [x_j, x_{j+1}]
\end{aligned}$$

Somit ist der erste Schritt des Beweises abgeschlossen und der zweite kann beginnen: Zur Bestimmung von s_j wird der Satz von Taylor mit dem Restglied in Form der Integralformel (vgl. Bronstein et al., 2008, S. 474) verwendet, welcher zunächst einmal allgemein angegeben wird:

Satz 3.2 *Satz von Taylor*
Sei f auf dem Intervall I eine n-mal differenzierbare Funktion, so lautet das Taylorpolynom an der Entwicklungsstelle $a \in I$

$$f(x) \;=\; f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m + \int_a^x \frac{(x-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t)dt$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(m)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t)dt. \tag{2}$$

Da $s(x)$ in Abhängigkeit von $s(x_{j+1}), s'(x_{j+1}) = m_{j+1}, s''(x_{j+1}) = M_{j+1}$ ausgedrückt werden soll, wird der Satz von Taylor nur bis zur ersten Ordnung durchgeführt. Übertragen auf $s(x)$ mit dem Intervall $x \in [x_j, x_{j+1}]$ ergibt dies für $m = 1$ nun:

$$s(x) = s(x_{j+1}) + s'(x_{j+1})(x - x_{j+1}) + \underbrace{\int_{x_{j+1}}^{x} (x-t)s''(t)dt,}_{I_0} \qquad x \in [x_j, x_{j+1}] \tag{3}$$

Zunächst wird das Integral I_0 berechnet, wobei die Variable $h_j := x_{j+1} - x_j$ zur besseren Lesbarkeit verwendet wird:

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{x_{j+1}}^{x} (x-t) \cdot \left(M_{j+1} \cdot \frac{t - x_j}{x_{j+1} - x_j} + M_j \cdot \frac{x_{j+1} - t}{x_{j+1} - x_j} \right) dt \\ &= \int_{x_{j+1}}^{x} M_{j+1} \frac{x(t-x_j)}{h_j} + M_j \frac{x(x_{j+1} - t)}{h_j} - M_{j+1} \frac{(t - x_j)t}{h_j} - M_j \frac{(x_{j+1} - t)t}{h_j} dt \end{aligned}$$

Dieses Intervall lässt sich aufgrund der Summenregel von Integralen aufteilen. Zuerst wird der Teil des Integrals I_1 betrachtet, in welchem M_{j+1} vorkommt:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{x_{j+1}}^{x} M_{j+1} x \frac{t - x_j}{h_j} - M_{j+1} \frac{(t-x_j)t}{h_j} dt \\ &= \frac{M_{j+1}}{h_j} \left(-x x_j t + \frac{xt^2}{2} + \frac{t^2 x_j}{2} - \frac{t^3}{3} \right) \Bigg|_{x_{j+1}}^{x} \\ &= \frac{M_{j+1}}{6h_j} (-6x^2 x_j + 3x^3 + 3x^2 x_j - 2x^3 + 6x x_j x_{j+1} - 3x x_{j+1}^2 - 3x_j x_{j+1}^2 + 2x_{j+1}^3) \\ &= \frac{M_{j+1}}{6h_j} (-3x^2 x_j + x^3 + 6x x_j x_{j+1} - 3x x_{j+1}^2 - 3x_j x_{j+1}^2 + 2x_{j+1}^3 \\ &\quad \underbrace{\underbrace{-3x^2 x_{j+1} + 3x^2 x_{j+1}}_{=0} \underbrace{+3x x_{j+1}^2 - 3x x_{j+1}^2}_{=0} \underbrace{-x_{j+1}^3 + x_{j+1}^3}_{=0}}_{=0}) \\ &= \frac{M_{j+1}}{6h_j} \left((x - x_{j+1})^3 + 3x_{j+1}^3 + 3x^2 x_{j+1} - 3x^2 x_j - 6x x_{j+1}^2 + 6x x_j x_{j+1} - 3x_j x_{j+1}^2 \right) \\ &= \frac{M_{j+1}}{6h_j} \left((x - x_{j+1})^3 + 3(x_{j+1} - x_j)(x^2 - 2x x_{j+1} + x_{j+1}^2) \right) \\ &= \frac{M_{j+1}}{6h_j} \left((x - x_{j+1})^3 + 3h_j (x - x_{j+1})^2 \right) \end{aligned} \tag{4}$$

Anschließend wird der zweite Teil des Integrals I_2 betrachtet:

$$I_2 = \int_{x_{j+1}}^{x} M_j x \frac{x_{j+1} - t}{h_j} - M_j \frac{(x_{j+1} - t)t}{h_j} dt$$

$$
\begin{aligned}
&= M_j \frac{x x_{j+1} t}{h_j} - M_j \frac{x t^2}{2h_j} - M_j \frac{x_{j+1} t^2}{2h_j} + M_j \frac{t^3}{3h_j} \Bigg|_{x_{j+1}}^{x} \\
&= \frac{M_j}{6h_j} \left(3x^2 x_{j+1} - x^3 - 3x x_{j+1}^2 + x_{j+1}^2 \right) \\
&= -\frac{M_j}{6h_j} \left(x - x_{j+1} \right)^3 \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Zusammen mit Gleichungen (4) und (5) kann Gleichung (3) für $j = 0, 1, \ldots, n-1$ *ausgerechnet werden:*

$$
\begin{aligned}
s(x) &= s(x_{j+1}) + s'(x_{j+1})(x - x_{j+1}) + \frac{M_{j+1}}{6h_j} \left((x - x_{j+1})^3 + 3h_j (x - x_{j+1})^2 \right) \\
&\quad - \frac{M_j}{6h_j} \left(x - x_{j+1} \right)^3 \\
&= s(x_{j+1}) + s'(x_{j+1})(x - x_{j+1}) + (M_{j+1} - M_j) \frac{(x - x_{j+1})^3}{6h_j} + \frac{M_{j+1}(x - x_{j+1})^2}{2}
\end{aligned}
$$

Dies liefert eine Schreibweise für $s(x)$*, wie in Schritt zwei gefordert. Im Folgenden wird nun die Ableitung bestimmt:*
Insbesondere gilt durch Ableiten für $s'(x)$

$$
s'(x) = s'(x_{j+1}) + M_{j+1}(x - x_{j+1}) + \frac{(M_{j+1} - M_j)(x - x_{j+1})^2}{2h_j}, j = 0, 1, \ldots, n-1.
$$

Werden beide Intervallgrenzen eingesetzt, ergibt sich dafür mit $h_j = x_{j+1} - x_j$*:*

$$
\begin{aligned}
s(x_j) &= s(x_{j+1}) + s'(x_{j+1})(x_j - x_{j+1}) + (M_{j+1} - M_j) \frac{(x_j - x_{j+1})^3}{6h_j} \\
&\quad + \frac{M_{j+1}(x_j - x_{j+1})^2}{2} \\
&= s(x_{j+1}) - s'(x_{j+1}) h_j - (M_{j+1} - M_j) \frac{h_j^2}{6} + \frac{M_{j+1} h_j^2}{2} \\
&= s(x_{j+1}) - s'(x_{j+1}) h_j + M_{j+1} \frac{h_j^2}{3} + M_j \frac{h_j^2}{6} \\
\frac{s(x_{j+1}) - s(x_j)}{h_j} &= s'(x_{j+1}) - M_j \frac{h_j}{6} - M_{j+1} \frac{h_j}{3}, j = 0, 1, \ldots, n-1
\end{aligned}
$$

Dadurch wurde Schritt drei ebenfalls abgeschlossen. Für Schritt vier wird das Intervall vor dem zuvor betrachteten Intervall betrachtet:
Wird das Intervall $x \in [x_{j-1}, x_j]$ *betrachtet, ergibt sich für* $s(x)$ *und* $s'(x)$ *analog zu vorher:*

$$
s(x) = s(x_j) + s'(x_j)(x - x_j) + (M_j - M_{j-1}) \frac{(x - x_j)^3}{6h_{j-1}} + \frac{M_j (x - x_j)^2}{2}, j = 1, 2, \ldots, n
$$

$$s'(x) = s'(x_j) + M_j(x - x_j) + \frac{(M_j - M_{j-1})(x - x_j)^2}{2h_{j-1}}, j = 1, 2, \dots, n$$

Hier werden ebenfalls beide Intervallgrenzen eingesetzt:

$$\begin{aligned}
s(x_{j-1}) &= s(x_j) + s'(x_j)(x_{j-1} - x_j) + (M_j - M_{j-1})\frac{(x_{j-1} - x_j)^3}{6h_{j-1}} + \frac{M_j(x_{j-1} - x_j)^2}{2} \\
&= s(x_j) - s'(x_j)h_{j-1} - (M_j - M_{j-1})\frac{h_{j-1}^2}{6} + \frac{M_j h_{j-1}^2}{2} \\
&= s(x_j) - s'(x_j)h_{j-1} + M_j\frac{h_{j-1}^2}{3} + M_{j-1}\frac{h_{j-1}^2}{6} \\
\frac{s(x_j) - s(x_{j-1})}{h_{j-1}} &= \frac{s(x_j) - \left(s(x_j) - s'(x_j)h_{j-1} + M_j\frac{h_{j-1}^2}{3} + M_{j-1}\frac{h_{j-1}^2}{6}\right)}{h_{j-1}} \\
&= s'(x_j) - M_j\frac{h_{j-1}}{3} - M_{j-1}\frac{h_{j-1}}{6}, j = 1, 2, \dots, n
\end{aligned}$$

Übrig bleibt nur noch der letzte Schritt des Beweises:
In diesem wird die Differenz der beiden Brüche $\frac{s(x_{j+1})-s(x_j)}{h_j}$ *und* $\frac{s(x_j)-s(x_{j-1})}{h_{j-1}}, j = 1, 2, \dots, n-1$ *gebildet:*

$$\begin{aligned}
\frac{s(x_{j+1}) - s(x_j)}{h_j} - \frac{s(x_j) - s(x_{j-1})}{h_{j-1}} &= s'(x_{j+1}) - M_j\frac{h_j}{6} - M_{j+1}\frac{h_j}{3} \\
&\quad - \left(s'(x_j) - M_j\frac{h_{j-1}}{3} - M_{j-1}\frac{h_{j-1}}{6}\right) \qquad (6)
\end{aligned}$$

Damit diese Gleichung weiter umgeformt werden kann, muss bestimmt werden, wie die Differenz der Ableitungen $s'(x_{j+1})$ *und* $s'(x_j)$ *umgeschrieben werden können.*

$$\begin{aligned}
s'(x_j) &= s'(x_{j+1}) + M_{j+1}(x_j - x_{j+1}) + \frac{(M_{j+1} - M_j)(x_j - x_{j+1})^2}{2h_j} \\
&= s'(x_{j+1}) - M_{j+1}h_j + \frac{(M_{j+1} - M_j)h_j^2}{2h_j} \\
&= s'(x_{j+1}) - \frac{M_{j+1}h_j}{2} - \frac{M_j h_j}{2} \\
&= s'(x_{j+1}) - \frac{h_j}{2}(M_{j+1} + M_j) \\
s'(x_{j+1}) - s'(x_j) &= s'(x_{j+1}) - \left(s'(x_{j+1}) - \frac{h_j}{2}(M_{j+1} + M_j)\right) \\
&= \frac{h_j}{2}(M_{j+1} + M_j)
\end{aligned}$$

Nun kann Gleichung (6) weiter umgeformt werden zu:

$$\frac{s(x_{j+1}) - s(x_j)}{h_j} - \frac{s(x_j) - s(x_{j-1})}{h_{j-1}} = \frac{h_j}{2}(M_{j+1} + M_j) - M_j\frac{h_j}{6} - M_{j+1}\frac{h_j}{3}$$

$$
\begin{aligned}
& - \left(-M_j \frac{h_{j-1}}{3} - M_{j-1} \frac{h_{j-1}}{6} \right) \\
= \quad & -M_{j+1} \frac{h_j}{6} + M_j \frac{h_{j-1} + h_j}{3} + M_{j-1} \frac{h_{j-1}}{6}
\end{aligned}
$$

Geschrieben als Matrix ergibt dies:

$$
\frac{1}{6} \begin{pmatrix}
h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & h_{n-1} & 2(h_{n-1}+h_n) & h_n
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
\frac{1}{h_0} & \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_0} & \frac{1}{h_1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \frac{1}{h_1} & \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1} & \frac{1}{h_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_3} - \frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_3} & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h_{n-1}} & \frac{1}{h_n} - \frac{1}{h_{n-1}} & \frac{1}{h_n}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} s(x_0) \\ s(x_1) \\ s(x_2) \\ \vdots \\ s(x_n) \end{pmatrix}
$$

Beide Matrizen haben die Dimension $(n-1) \times (n+1)$, alle Spalten der Matrix sind linear unabhängig voneinander. Da der Vektor $s = (s_0 \ s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n)^T$ ($\cdot\ ^T \mathrel{\hat{=}}$ transponiert) Dimension $n+1$ hat, kann er durch die Matrizen nicht eindeutig bestimmt werden. Deshalb muss an dieser Stelle eine der zuvor nach Aufgabe 3.2 angegebenen Einschränkungen gewählt werden, um den Beweis zu Ende zu führen. Es wird beispielhaft die natürliche Endbedingung gewählt, für welche gilt, dass

$$
s''(a) = s''(b) = 0.
$$

Dadurch gilt $M_0 = s''(a) = 0 = s''(b) = M_n$ und die Matrizen werden zu folgenden vereinfacht:

$$
\frac{1}{6} \begin{pmatrix}
2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & \dots & 0 \\
0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\dots & 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\
\dots & 0 & 0 & 0 & h_{n-1} & 2(h_{n-1}+h_n)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \frac{s(x_1)-s(x_1)}{h_1} - \frac{s(x_1)-s(x_0)}{h_0} \\ \frac{s(x_2)-s(x_2)}{h_2} - \frac{s(x_2)-s(x_1)}{h_1} \\ \vdots \\ \frac{s(x_n)-s(x_n)}{h_n} - \frac{s(x_n)-s(x_{n-1})}{h_{n-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{pmatrix} \tag{7}
$$

Bei der Matrix M in Gleichung (7) handelt es sich nun um eine $(n-1)\times(n-1)$ Matrix. Diese Matrix ist invertierbar. Der Beweis dazu befindet sich in Stoer (2000) ab Seite 112. Hierbei wird gezeigt, dass $M \cdot z = w$ mit $z, w \in \mathbb{R}^{n+1}$, nur eine Lösung hat, wenn $w = 0$ gesetzt wird, nämlich $z = 0$. Aus dieser Eigenschaft der Nichtsingularität folgt, dass für Matrix M gilt, dass $\det(M) \neq 0$ und somit folgt die Invertierbarkeit. Dies wiederum bedeutet, dass Gleichung (7) eine eindeutige Lösung hat. □

Als Anwendungsbeispiel kann erneut die Animation eines springenden Balles verwendet werden.
Da auf jedem Intervall ein kubisches Polynom betrachtet wird, werden das Polynom

$$f(x) = y = a_i \cdot x^3 + b_i \cdot x^2 + c_i \cdot x + d_i, \qquad i = 1, \ldots, 7$$

und dessen Ableitung

$$df = y' = 3 \cdot a_i \cdot x^2 + 2 \cdot b_i \cdot x + c_i, \qquad i = 1, \ldots, 7$$

verwendet. Es gibt also $4 \cdot 7 = 28$ Unbekannte.Um diese alle zu bestimmen werden 28 Gleichungen benötigt, welche sich aus den Bedingen ergeben, die in Aufgabe 3.2 beschrieben wurden. Zum einen können bestimmte Keyframes in bestimmte Normalformen eingesetzt werden. Dies ergibt vierzehn Gleichungen, da jeweils die Punkte P_i und $P_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, 7$ in das i-te kubische Polynom eingesetzt werden können. Weitere zwölf Gleichungen können anhand der Ableitungen aufgestellt werden, da die Ableitungen des $i-1$-ten und i-ten Polynoms ($i = 2, \ldots, 7$) in Punkt P_i und die des i-ten und $i+1$-ten ($i = 1, \ldots, 6$) in Punkt P_{i+1} übereinstimmen sollen. Die letzten zwei fehlenden Gleichungen werden durch eine Wahl der zuvor angegeben Einschränkungen für die Randbedingungen formuliert. Hier wurde die natürliche Randbedingung gewählt. Die Gleichungen sehen wie folgt aus:

$$
\begin{aligned}
a_i \cdot t_i^3 + b_i \cdot t_i^2 + c_i \cdot t_i + d_i &= h_i && i = 1, \ldots, 7 \\
a_i \cdot t_{i+1}^3 + b_i \cdot t_{i+1}^2 + c_i \cdot t_{i+1} + d_i &= h_{i+1} && i = 1, \ldots, 7 \\
3 \cdot a_i \cdot t_i^2 + 2 \cdot b_i \cdot t_i + c_i &= 3 \cdot a_{i-1} \cdot t_i^2 - 2 \cdot b_{i-1} \cdot t_i - c_{i-1} && i = 2, \ldots, 7 \\
3 \cdot a_i \cdot t_{i+1}^2 + 2 \cdot b_i \cdot t_{i+1} + c_i &= 3 \cdot a_{i+1} \cdot t_{i+1}^2 - 2 \cdot b_{i+1} \cdot t_{i+1} - c_{i+1} && i = 1, \ldots, 6 \\
3 \cdot a_1 \cdot t_1^2 + 2 \cdot b_1 \cdot t_1 + c_1 &= 0 \\
3 \cdot a_7 \cdot t_8^2 + 2 \cdot b_7 \cdot t_8 + c_7 &= 0
\end{aligned}
$$

Wird dieses Gleichungssystem in MATLAB eingegeben, so entsteht folgender Graph für die Bewegung eines springenden Balles.

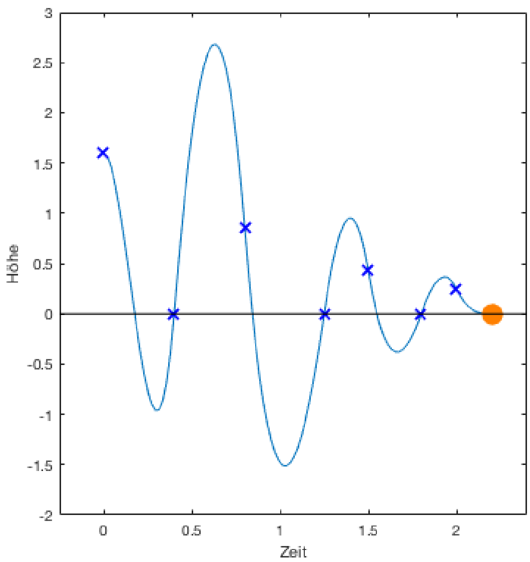


Abbildung 10: Interpolation durch kubische Splines

Aus den gleichen Gründen, wie bei der Polynominterpolation, ist die entstehende Animation nicht zufriedenstellend. Der Ball dringt drei Mal in den Boden ein und springt nach dem ersten Mal höher als den Punkt, an dem er losgelassen wurde.

Aus diesem Grund kann eine weitere Interpolationsart betrachtet werden, welche es ermöglicht den Graph zu beeinflussen, indem die Ableitungen in den Keyframes vorgegeben werden kann.

3.2.4. Hermitesche Interpolation

Um die Ableitungen in den einzelnen Punkten besser beeinflussen zu können und vorzugeben, wie ein Polynom verlaufen soll, kann eine weitere Interpolationsart betrachtet werden, welche sich hermitesche Interpolation nennt. Hier werden zusätzlich zu den vorgegeben Punkten auch die Ableitungen in den Punkten vorgegeben, so dass der Verlauf des Polynoms mehr eingeschränkt wird.

Aufgabe 3.3 *(vgl. Dahmen & Reusken, 2006, S. 289) und (vgl. Stoer, 2000, S. 56) Sei [a,b] ein Intervall mit n Stützstellen* $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ *und* $f \in C^k([a,b])$, *wobei* $C^k([a,b])$ *die Menge der auf [a,b] k mal stetig differenzierbaren Funktionen beschreibt. Sei P vom* $Grad(P) \leq m$, *wobei* $m + 1 = \sum_{i=0}^{n} n_i$ *und* $k = 0, \ldots, n_i - 1$ *die Anzahl der definierten Ableitungen* $f_i^{(k)}$ *in Punkt i. Bestimme das Polynom für das gilt, dass*

$$P^{(k)}(x_i =) f_i^{(k)}.$$

Das durch diese Bedingungen definierte Polynom P ist eindeutig und existiert, was im folgenden bewiesen wird:

Beweis 3.3 *Begonnen wird mit der Eindeutigkeit angelehnt an (vgl. Stoer, 2000, S. 56), die so gezeigt wird, wie es bereits bei der Polynominterpolation gezeigt wurde: Angenommen es existieren zwei Polynome $P_1 \in \Pi_n$ und $P_2 \in \Pi_n$, die die Bedingungen aus Aufgabe 3.3 erfüllen. So gilt für das Differenzpolynom $Q(x) := P_1(x) - P_2(x)$*

$$Q^{(k)}(x_i) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n_i - 1, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

da beide Polynome gerade an den Stützstellen x_i übereinstimmen. Somit ist x_i mindestens eine n_i-fache Nullstelle von Q. Werden die Nullstellen mit samt ihrer Vielfachheiten gezählt, so ergibt dies, dass Q $n+1$ Nullstellen besitzt. Da aufgrund der Definition $Q \in \Pi_n$ also höchstens Grad n hat, ist Q identisch Null.
Im zweiten Schritt wird die Existenz bewiesen:
Aus der Eindeutigkeit folgt die Existenz, da durch die Bedingungen, die in Aufgabe 3.3 beschrieben werden, ein lineares Gleichungssystem mit $n + 1$ Gleichungen aufgestellt werden kann. Da das gesuchte Polynom $P \in \Pi_n$ höchstens Grad n hat, besitzt die Normalform dieses Polynoms $n + 1$ unbekannte Koeffizienten c_i

$$P(x) = c_0 + c_1 \cdot x + \ldots + c_n \cdot x^n.$$

Wird das Gleichungssystem als Matrix geschrieben, ist klar, dass die entstandene Matrix nichtsingulär ist, da die Eindeutigkeit bereits bewiesen wurde. Aus diesem Grund besitzt das lineare Gleichungssystem für beliebige $f_i^{(k)}$ eine eindeutige Lösung. □

Als Anwendungsbeispiel kann erneut die Animation eines springenden Balles verwendet werden.
Hier werden kubische Polynome betrachtet, für welche gilt

$$f(x) = y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

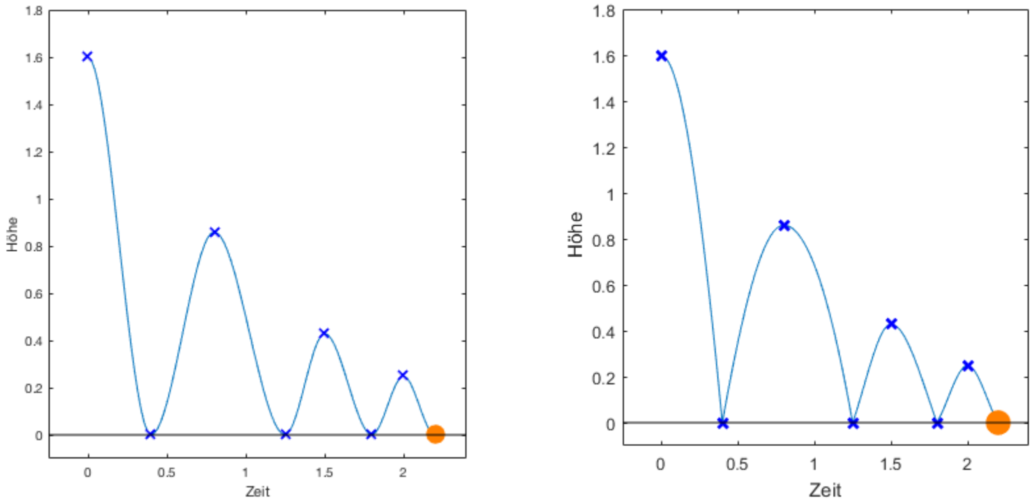
und dessen Ableitung

$$df = y' = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c.$$

Es gibt also vier Unbekannte, so dass vier Gleichungen aufgestellt werden müssen, um das Polynom eindeutig zu bestimmen. Da das Polynom durch zwei Punkte laufen muss, können diese einfach in die zwei oben stehenden Gleichungen eingesetzt werden. Die Koeffizienten werden über ein Gleichungssystem bestimmt.

$$\begin{aligned} a \cdot t_i^3 + b \cdot t_i^2 + c \cdot t_i + d &= h_i \\ a \cdot 3 \cdot t_i^2 + b \cdot 2 \cdot t_i + c &= df_i \\ a \cdot t_{i+1}^3 + b \cdot t_{i+1}^2 + c \cdot t_{i+1} + d &= h_{i+1} \\ a \cdot 3 \cdot t_{i+1}^2 + b \cdot 2 \cdot t_{i+1} + c &= df_{i+1} \end{aligned}$$

Die Wahl der Werte spielt für diese Animation eine entscheidende Rolle. So entstehen zwei komplett verschiedene Animationen, je nachdem was für die Ableitungen angegeben wird.



(a) Alle Ableitungen gleich Null gesetzt

(b) Normierung der Ableitung durch h_1

Abbildung 11: Zwei Graphen mit verschiedenen Werten für die Ableitungen in den Keyframes am Boden

Im linken Bild (siehe Abbildung 11a) wurden alle Ableitungen gleich Null gesetzt. Im rechten (siehe Abbildung 11b) hingegen wurden nur die Ableitungen der Hochpunkte gleich Null gesetzt, da es sich bei diesen tatsächlich um Hochpunkte handelt. Bei den Punkten auf dem Boden wurde mit Normierung gearbeitet, da die Steigung in diesen Punkten mit der Zeit abnimmt. Die abnehmende Komponente wird durch die Normierung der Höhen mit h_1 übernommen. Zusätzlich muss unterschieden werden, ob sich der Ball gerade aus der Luft Richtung Boden bewegt oder ob der Ball sich auf dem Weg vom Boden in die Luft befindet. Für den ersten Fall ist die Ableitung nämlich negativ und für den zweiten positiv. Dies ist im folgenden Code verdeutlicht:

```
df = [0 NaN 0 NaN 0 NaN 0 NaN];
für i von 1 bis zur Länge von t -1
   falls i/2 Rest 1 hat, sei
        df_gerade = -7*h(i)/h(1);
   sont
        df_gerade = 7*h(i+1)/h(1);
   end
für j in zweierschritten von 2 bis Länge von t, sei
   df(j) = df_gerade;
end
end
```

Obwohl der Verlauf in Abbildung 11b gut aussieht und die dazugehörige Animation die Bewegung eines springenden Balles sehr gut annähert, wird noch eine neue Art der Interpolation betrachtet. Diese Art wird nämlich von Programmen, mit denen Animationen erstellt werden, verwendet.

3.2.5. TCB-Methode

Die TCB-Methode ist eine besondere Art der Splines, welche es ermöglicht, die Funktion zwischen drei Punkten beliebig zu verändern. Dafür werden drei verschiedene Parameter t (Tension), c (Continuity) und b (Bias) verwendet (vgl. Peters, 2016, S. 56).
Der TCB-Methode liegen die Catmull-Rom-Splines zugrunde. Diese wurden extra für die Erstellung von Animationen entwickelt. Für diese Splines ist eine Angabe von bestimmten Ableitungen notwendig. Ist die zu interpolierende Funktion bekannt, so kann die Ableitung des Splines gleich der Ableitung der Funktion gewählt werden. Jedoch ist das nicht immer der Fall. So müssen für die Bewegung passende Ableitungen bestimmt werden. Ungeübt ist es nicht möglich, anhand von Bewegungen korrekte Werte für die Ableitungen zu bestimmten Zeitpunkten anzugeben. Aus diesem Grund wurde eine Methode entwickelt, die aufgrund von vorhandenen Daten, nämlich den vorliegenden Punkten $P_i, i = 0, 1, \ldots, n$, für den Anwender die sinnvollen Ableitungen bildet (vgl. Peters, 2016, S. 56).
Für diese Methode werden Vektoren verwendet und die x-y-Ebene als Raum der Vektoren $(x\ y)^T$ verstanden. Somit kann die Ableitung in einem Punkt auch als ein Ableitungsvektor $\vec{v}_i, i = 0, 1, \ldots, n$ verstanden werden. Zunächst wird der Ableitungsvektor $\vec{v}_i$ für Punkt P_i berechnet, indem der Mittelwert der beiden Verbindungsvektoren zwischen P_{i-1} und P_i nämlich $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ und zwischen P_i und P_{i+1} sprich $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ verwendet wird (vgl. Peters, 2016, S. 57):

$$\vec{v}_i = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{P_{i-1}P_i} + \overrightarrow{P_iP_{i+1}}\right).$$

Der Teil zwischen den Klammern, also $\overrightarrow{P_{i-1}P_i} + \overrightarrow{P_iP_{i+1}}$, entspricht dem Verbindungsvektor (siehe Abbildung 12) $\overrightarrow{P_{i-1}P_{i+1}}$.
Diese Möglichkeit der Bestimmung der Ableitung gilt nur für innere Punkte, das heißt für alle Punkte P_i mit $i = 1, 2, \ldots, n-1$, da auf den vorherigen Punkt P_{i-1} und den darauffolgenden Punkt P_{i+1} zurückgegriffen wird. Bei den Randpunkten P_0 und P_n muss deshalb, ähnlich wie vorher im Abschnitt 3.2.3 zu Splines, die Ableitung an diesen beiden Punkten vorgegeben werden. Um dies zu umgehen, um die Werte an den Randpunkten abhängig von den Zwischenpunkten zu machen, wurde von Parent ein Algorithmus entwickelt, bei welchem wieder auf benachbarte Punkte zugegriffen wird (vgl. Parent, 2012, S. 456). Bei ihm wird der Ableitungsvektor im Punkt P_0 durch die Verbindungsvektoren $\overrightarrow{P_0P_1}$ und $\overrightarrow{P_1P_2}$ berechnet: $\vec{v}_0 = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{P_0P_1} + \overrightarrow{P_1P_2}\right)$.

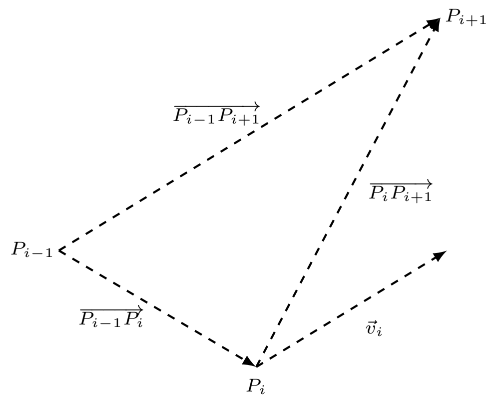


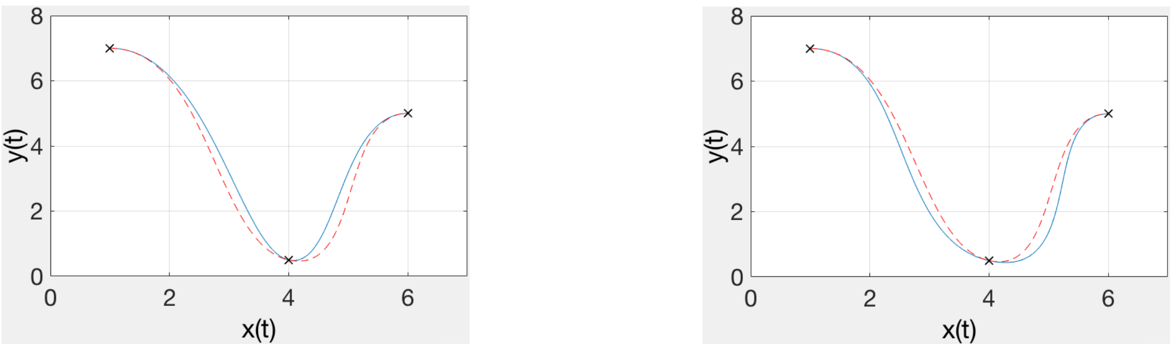
Abbildung 12: Konstruktion des Ableitungsvektors $\vec{v}_i$

Diese Splines sind sehr starr, so dass die dadurch entstehende Funktion nicht sehr gut beeinflusst werden kann. Aus diesem Grund entwickelten Kochanek und Bartels die TCB-Methode (vgl. Kochanek & Bartels, 1984, S. 35ff.). Hierbei wird der Ableitungsvektor $\vec{v}_i$ weiterhin durch eine Linearkombination der Verbindungsvektoren $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ und $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ berechnet, allerdings werden nun zwei verschiedene Ableitungsvektoren bestimmt. Es wird unterschieden zwischen $\vec{v}_i^L$, für Punkte links von P_i, und $\vec{v}_i^R$, für Punkte rechts von P_i. Zusätzlich werden drei Parameter $t, c, b \in [-1, 1]$ eingeführt, welche den Graph beeinflussen können. Für $\vec{v}_i^L$ und $\vec{v}_i^R$ gilt:

$$\vec{v}_i^L = \frac{(1-t)(1-c)(1+b)}{2}\overrightarrow{P_{i-1}P_i} + \frac{(1-t)(1+c)(1-b)}{2}\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$$
$$\vec{v}_i^R = \frac{(1-t)(1+c)(1+b)}{2}\overrightarrow{P_{i-1}P_i} + \frac{(1-t)(1-c)(1-b)}{2}\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$$

Werden alle Parameter $t = c = b = 0$ gesetzt, so erhält man wieder die Catmull-Rom-Splines. Im Folgenden wird nun der Einfluss der einzelnen Parameter verdeutlicht:

- t Tension (Spannung):
  Für negative t wird $\frac{(1-t)}{2}$ immer größer, je weiter sich t der -1 annähert. Das führt dazu, dass der Ableitungsvektor immer länger wird. Bei positiven t wird der Ableitungsvektor hingegen immer kürzer. Dies bedeutet, dass t den Grad des Stauchens bestimmt. So nimmt die Ableitung in der Umgebung von P_i für negative Zahlen immer kleinere Werte an (siehe Abbildung 13b). Umgekehrt nimmt die Ableitung in den Punkten in der Umgebung von P_i für positive t zu (siehe Abbildungen 13a).
  Dies lässt sich auch als Auseinanderziehen bzw. Zusammenschieben entlang der x-Achse interpretieren.

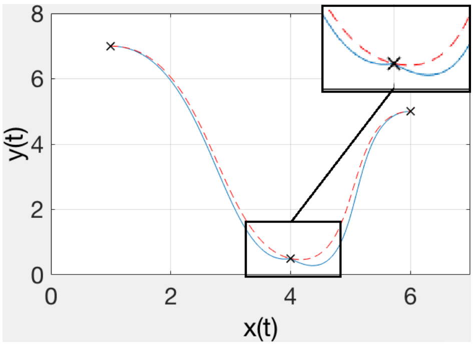


(a) $t = 1$ (b) $t = -1$

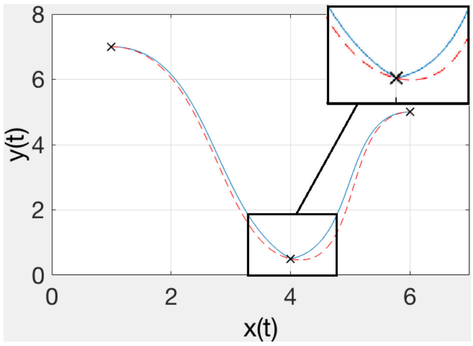
Abbildung 13: Einfluss des Parameters t (rot: ursprünglicher Graph, blau: neuer Graph)

- c Continuity (Stetigkeit):
  c unterscheidet zwischen den beiden Teilen des Ableitungsvektors. Für $c = 0$ ist die Kurve stetig. Sobald $c \neq 0$, ist in der Kurve an Punkt P_i ein Knick zu sehen.

Das Vorzeichen von c bestimmt die Richtung und Stärke des Knicks. Wird $c > 0$ gewählt, so entsteht ein Ansatz eines Knicks mit Spitze nach oben, wie er in Abbildung 14a unten zu sehen ist. Wird $c < 0$ gewählt, so entsteht ein Knick, dessen Spitze nach unten gerichtet ist (siehe Abbildung 14b).
Dies lässt sich auch als Hochziehen bzw. Herunterschieben entlang der y-Achse verstehen.



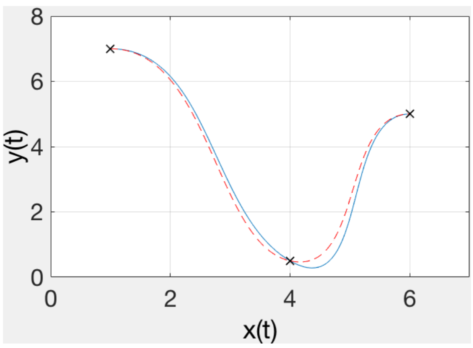
(a) $c = 1$



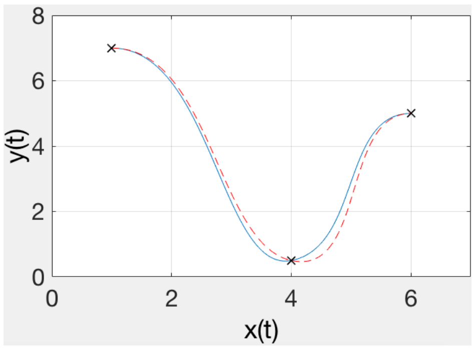
(b) $c = -1$

Abbildung 14: Einfluss des Parameters c (rot: ursprünglicher Graph, blau: neuer Graph)

- b Bias (Neigung):
  b gibt den Gewichtungsfaktor der beiden beteiligten Verbindungsvektoren $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ und $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ an. Das führt dazu, dass sich nicht nur seine Länge verändern kann, sondern auch die Richtung. So wird die Kurve entweder nach rechts oder nach links verzerrt. Das heißt, dass der Tiefpunkt nicht bei Punkt P_i, sondern nach rechts oder links verschoben ist. Ist $b > 0$, ist der Tiefpunkt weiter rechts (siehe Abbildung 15b), und bei $b < 0$ weiter links (siehe Abbildung 15a).



(a) $b = 1$



(b) $b = -1$

Abbildung 15: Einfluss des Parameters b (rot: ursprünglicher Graph, blau: neuer Graph)

3.3. Vor- und Nachteile einzelner Interpolationsarten

In Bezug auf Animationsfilme haben die einzelnen Interpolationsarten Vor- und Nachteile. Das ausschlaggebende Kriterium zum Auswählen der Interpolationsart ist die zu interpolierende Bewegung. Je komplexer diese ist, desto komplexere Interpolationsarten müssen verwendet werden (vgl. Peters, 2016, S. 131ff).
Die *lineare Interpolation* bietet sich vor allem bei Objekten an, die eine gleichbleibende Geschwindigkeit haben. Es müssen also Gegenstände sein, die nicht beschleunigt werden. Ein Beispiel hierfür ist ein Auto mit gleichbleibender Geschwindigkeit, wenn der Beobachter steht. Zudem ist hierbei vorteilhaft, dass die lineare Interpolation nicht immer komplett neu berechnet werden muss, sobald ein neuer Punkt zu den Keyframes hinzugefügt wird. Die Verbindungsgerade zwischen dem hinzugefügten Punkt lässt sich schließlich genauso berechnen wie die Verbindungen zwischen den vorherigen Punkten.
Ein großer Nachteil der *Polynominterpolation* ist, dass das Polynom bei steigender Anzahl von Punkten (außer einzelne Spezialfälle) immer größere Ausschläge aufweist. Das führt dazu, dass das interpolierende Polynom stark von der Funktion bzw. der gewünschten Bewegung abweicht. Zusätzlich muss, auch wenn dieser Prozess automatisiert werden kann, beim Hinzufügen neuer Punkte das interpolierende Polynom neu geschrieben werden, da sich der Grad erhöht. Das führt auch dazu, dass das komplette lineare Gleichungssystem neu geschrieben werden muss, was viel Arbeit macht und Zeit kostet.
Aus diesem Grund ist die Polynominterpolation für die Erstellung von Animationen in der Filmwelt nicht geeignet und wird dafür auch nicht verwendet.
Zusätzlich wird an dieser Stelle klar, dass viele Schulaufgaben der Mathematik falsche Voraussetzungen verwenden. Hierbei wird häufig suggeriert, dass benötigte Punkte in bestimmten Kontexten durch Polynome höheren Grades interpoliert werden können. Dies ist allgemein nicht der Fall und vermittelt ein falsches Bild an die SuS.
Die Polynome die durch die *hermitesche Interpolation* entstehen passen sich sehr gut der zu interpolierenden Funktion an, vor allem, wenn die *TCB-Methode* verwendet wird und der Graph noch im Nachhinein beeinflusst werden kann. Zudem muss beim Hinzufügen oder Entfernen eines Punktes nichts neu geschrieben werden. Das Gleichungssystem kann weiter verwendet werden.
Zur Erstellung von Animationen bietet sich aus diesem Grund die TCB-Methode am meisten an und wird auch tatsächlich bei der Erstellung von Animationen in manchen Softwares, bspw. Synfig, verwendet.

4. Didaktisch-methodisches Konzept

Dieses Kapitel dient der Vorstellung des didaktisch-methodischen Konzepts des Lernmoduls. Es wird ein Überblick über die Materialien, den zeitlichen Ablauf des erarbeiteten CAMMP days und die Experimente gegeben. Dabei wird auf die Ziele und die Struktur des Tages eingegangen. Zudem wird ein kurzer Einblick in die Vorträge gegeben.

4.1. Ziele und curriculare Einbindung des entwickelten Lernmoduls

Der entwickelte CAMMP day benötigt, aufgrund des mathematischen Hintergrundes von Animationsfilmen, fachliche Inhalte der Analysis der Oberstufe und ist sowohl für Grund- als auch Leistungskurse der Oberstufe geeignet. Die SuS sehen dadurch im Laufe des Tages, dass die Mathematik des Unterrichts nicht nur für die Schule gelernt wird, sondern auch eine Verwendung mit Alltagsbezug findet. Zusätzlich werden so die Inhalte vertieft oder schon weiter zurückliegende Inhalte wiederholt und aufgefrischt.
Im Rahmen des Lernmoduls spielt die Analysis eine zentrale Rolle. Die Mathematik des Moduls greift auf Geradengleichungen (siehe Kapitel 3.2.1) aus der siebten Stufe zurück (vgl. KLP Mathematik Sek. I, S. 34). Hier lernen SuS, wie lineare Funktionen aufgestellt und in einem Sachzusammenhang interpretiert werden (vgl. Greulich et al., 2007, S. 90ff). Zusätzlich werden Normalformen von Polynomen (siehe Kapitel 3.2.2) benötigt, welche die SuS in der Einführungsphase kennenlernen (vgl. KLP Mathematik Sek. II, S. 23). Da der Begriff der Normalform die SuS ab der achten Klasse begleitet, sollte dieser zum Vorwissen der SuS gehören. Ebenfalls wird das Ableiten von Polynomfunktionen in der Einführungsphase thematisiert (vgl. KLP Mathematik Sek. II, S. 23), welches zur Bearbeitung des Moduls vorausgesetzt wird (siehe Kapitel 3.2.3).
Darüber hinaus sollen die SuS ihre Modellierungskompetenz ausbauen. Das bedeutet, dass sie die Realsituation verstehen und in mathematische Modelle übersetzen und dadurch mathematisieren. Sie müssen ihr mathematisches Wissen anwenden und am Ende die Lösungen interpretieren. Das bedeutet, dass sie die im mathematischen Modell gewonnenen Lösungen in Bezug zur realen Situation setzen, diese bewerten und gegebenenfalls anschließend ihren Lösungsweg oder das Modell verändern.
Im erarbeiteten Modul wird der Modellierungskreislauf häufig durchlaufen, weshalb die SuS das Konzept der mathematische Modellierung am Ende des Tages kennen sollten. Dazu gehört, dass sie die einzelnen notwendigen Schritte der mathematischen Modellierung selbstständig durchlaufen. Zudem werden auch die anderen prozessbezogenen Kompetenzen *Problemlösen, Argumentieren, Kommunizieren* und *Werkzeuge Nutzen* geschult, wobei diese jedoch nicht im Vordergrund stehen und nicht den gleichen Stellenwert wie das *Modellieren* haben. Alle zusammengenommen spielen dennoch eine wichtige Rolle im Modellierungstag und werden bei einer Auseinandersetzung mit der Problemstellung ausgebaut.
Das erarbeitete Modul soll den SuS einen Überblick verschaffen, wie Animationsfilme erstellt werden. Sie sollen verstehen, dass verschiedene Situationen und Bewegungen unterschiedlich animiert werden. Das heißt, dass abhängig von der Situation eine an-

dere Mathematik gewählt werden muss. Zusätzlich soll den SuS klar werden, dass die Schulmathematik für einen groben Überblick zur Beantwortung von komplexen Fragestellungen, wie „Wie funktionieren eigentlich Animationsfilme und was hat das mit Mathe zu tun?“, ausreicht.
Das erarbeitete Modul soll den SuS Motivation geben, sich mit der Mathematik aus der Schule intensiv auseinanderzusetzen, da ihnen bewusst werden soll, welche Rolle und welche Bedeutung sie außerhalb der Mathematik und insbesondere für den eigenen Alltag spielt.
Zudem soll das Modul so konzipiert sein, dass möglichst viele SuS angesprochen werden. Dazu wurde darauf geachtet, dass im gesamten Verlauf des CAMMP days mathematische Sachverhalte auf drei verschiedene Weisen dargestellt werden: enaktiv, ikonisch und symbolisch (vgl. Bruner, 1964, S. 2). Dadurch soll jedem Schüler / jeder Schülerin, unabhängig von seinem / ihrem Lerntyp, die Möglichkeit zum Verständnis angeboten werden.

4.2. Ablauf des CAMMP days

Der CAMMP day beginnt in der Regel um 9 Uhr und endet gegen 15 Uhr, so dass sich der komplette Tag über sechs Stunden erstreckt. Darin inbegriffen sind jedoch viele verschiedene Vorträge der Dozenten und auch Besprechungen, Präsentationsphasen der SuS und Pausen. Insgesamt haben die SuS grob drei Stunden reine Bearbeitungszeit für das erarbeitete Modul.
Der genaue Ablauf des CAMMP days findet sich stichpunktartig im methodischen Konzept im Anhang 7. Hier wird der Ablauf ausführlich dargestellt:

1. Der CAMMP day startet mit einer *Begrüßung* durch die Dozenten, in der das Schülerlabor CAMMP vorgestellt und der Ablauf des Tages für die SuS transparent gemacht wird. Im Anschluss daran folgt der *Modellierungsvortrag* eines Doktoranden, welcher auf mathematische Modellierung eingeht. Dabei wird der Modellierungskreislauf vorgestellt und mit einer Anwendung bzw. einem Forschungsgebiet verbunden. Der Doktorand beschreibt jeden Schritt einmal theoretisch und gibt zusätzlich zur Veranschaulichung Beispiele aus seiner Forschung.

2. Der *Problemstellungsvortrag mit Diskussionen* stellt das Thema „Wie funktionieren eigentlich Animationsfilme und was hat das mit Mathe zu tun?“ des CAMMP days vor (siehe Kapitel 4.3.2), so dass den SuS klar wird, womit sie sich den Tag lang beschäftigen werden. Es wird auf die Geschichte der Animationsfilme eingegangen und dann gemeinsam überlegt, wie passende mathematische Modelle aussehen könnten. Im Anschluss an den Vortrag werden die verwendeten Softwares MATLAB und Synfig (siehe Kapitel 4.3.3) kurz vorgestellt, die während des Tages verwendet werden.

3. In der *ersten Arbeitsphase* (siehe Kapitel 4.3.4) beschäftigen die SuS sich mit dem ersten mathematischen Modell, in welchem die lineare Interpolation verwendet

wird. Nachdem die SuS die Formel korrekt in MATLAB eingegeben haben, erstellt dieses eine Animation, anhand welcher die SuS beurteilen müssen, inwiefern diese der Bewegung eines springenden Balles entspricht. Zu jedem Schritt liegen Hilfekarten aus, die bei Bedarf verwendet werden können. Im Anschluss erstellen die SuS eine erste eigene Animation mit Hilfe von *Synfig*.

4. Das erste Arbeitsblatt wird vor einer ersten *kleinen Pause* besprochen (siehe Kapitel 4.3.5). Dabei zeichnen freiwillige SuS auf einer vorgefertigten Folie den Graphen der erstellten Animation. Zusätzlich sollen sie erklären, welche Formel sie verwendet haben und wie diese entstanden ist. Direkt im Anschluss hält ein Dozent die *erste Zwischenpräsentation*, in welcher Bezug auf den mathematischen Modellierungskreislauf genommen wird. Im Anschluss daran wird im Plenum über die Qualität des mathematischen Modells diskutiert.

5. In der *zweiten Arbeitsphase* bekommen die SuS das zweite Blatt und beschäftigen sich mit der nächsten Interpolationsart (siehe Kapitel 4.3.6), nämlich der Polynominterpolation. Die schnellen SuS bekommen noch vor der Mittagspause das dritte Blatt, so dass sie keinen Leerlauf haben.

6. Vor der einstündigen *Mittagspause* findet, analog zur ersten Besprechung, die *Besprechung des zweiten Arbeitsblattes* statt (siehe Kapitel 4.3.7), nach welcher die *zweite Zwischenpräsentation* folgt. Dabei wird wieder im Plenum beurteilt, ob das Modell zufriedenstellend ist. Zum Schluss folgt eine Präsentation zur *Berufs- und Studienorientierung*, in welcher unter anderem der Studiengang Computational Engineering Science (CES) vorgestellt wird.

7. Nach der Mittagspause arbeiten die SuS in der *dritten Arbeitsphase* am neu ausgeteilten dritten Arbeitsblatt (siehe Kapitel 4.3.8). Die SuS, die die das Blatt bereits vorher erhalten haben, bearbeiten dies weiter. Analog zum ersten und zweiten Arbeitsblatt wird von einem freiwilligen Schüler / einer freiwilligen Schülerin ein Ergebnis vorgestellt (siehe Kapitel 4.3.9). Die Interpretation des Modells folgt in der *dritten Zwischenpräsentation* angeleitet durch einen Dozenten.

8. In der vierten Arbeitsphase bearbeiten die SuS das vierte Arbeitsblatt (siehe Kapitel 4.3.10), in welchem sie das letzte mathematische Modell aufstellen. Mit Hilfe dieses Modells erstellen sie eine weitere Animation im Programm Synfig.

9. Der *Tagesabschluss* beginnt mit einer letztes *Diskussion* zusammen mit den SuS über die Qualität des letzten erstellten Modells (siehe Kapitel 4.3.12) und wie dies eventuell noch weiter verbessert werden könnte. Danach wird die *closing-Präsentation* gehalten, in der noch einmal Angebote von CAMMP vorgestellt werden. Als Abschluss des Tages dient die *Evaluation* (siehe Kapitel 5.1), damit die SuS Feedback geben können, um dem CAMMP Team die Möglichkeit zu geben, das Modul zu verbessern.

Bei den Sicherungsphasen ist immer zu beachten, dass sie idealerweise durchgeführt werden, wenn die meisten SuS das entsprechende Arbeitsblatt erfolgreich bearbeitet haben. Es kann jedoch passieren, dass ein sehr heterogener Kurs den Workshop durchläuft. In diesem Fall muss individuell geschaut werden, wann eine Besprechung sinnvoll ist. Bei der Sicherung sollte jedoch zumindest der Großteil des Kurses das Aufgabenblatt abgeschlossen haben. Außerdem soll in den Sicherungsphasen so vorgegangen werden, dass in der ersten Sicherungsphase die Dozenten bei der Reflexion den Großteil der geleisteten Schritte vorgeben. Dies lässt jedoch bei jeder Besprechung nach, so dass die SuS selbst reflektieren und die Vorgehensweise der Dozenten dabei übernehmen.

4.3. Vorstellung der Materialien

4.3.1. Modellierungsvortrag

Der Modellierungsvortrag dient zur Vorstellung des mathematischen Modellierungskreislaufs (siehe Kapitel 2.2.3), auf den im Laufe des CAMMP days immer wieder zurückgegriffen wird. Der Vortrag ist somit essentiell für eine erfolgreiche Durchführung des Tages. Da der Vortrag von Doktoranden des Instituts MathCCES der RWTH Aachen gehalten wird, wurde dieser nicht im Rahmen der Arbeit entworfen.
Jeder Doktorand stellt zur Berufs- und Studienorientierung sich und seinen Werdegang in diesem Vortrag kurz vor und geht anschließend auf den Modellierungskreislauf ein. Dieser wird schrittweise durchlaufen und an jedem Schritt wird erklärt, was hier getan wird und welche Fragen hier dominant sind. Zusätzlich kombinieren die Doktoranden diese Schritte mit einem interessanten Thema aus der eigenen Forschung, damit die SuS sich diese leichter vorstellen können.

4.3.2. Einführungsvortrag

Im Problemstellungsvortrag (siehe Anhang B.1) wird vorgestellt, mit welcher Problemstellung die SuS sich während des CAMMP days auseinandersetzen werden. Zu Beginn wird eine Sequenz aus einer Folge der „Sendung mit der Maus“ (Maiwald, 2014) gezeigt. In dieser wird auf die Erstellung von Animationsfilmen eingegangen. Es wird erklärt, dass es sich um eine Abfolge von statischen Bildern handelt, die schnell nacheinander gezeigt werden. Zusätzlich taucht das Wort Hauptbild, auch Keyframe genannt, das erste Mal auf, welches zentral für den CAMMP day ist. Um sicherzustellen, dass die SuS mit dem Wissen über die Hauptaussagen in den CAMMP day starten, wird der Filmausschnitt von den Sus zusammengefasst. Gerade die Rolle der Hauptbilder sollte nach dem Film deutlich geworden sein.
Danach wird kurz auf die Geschichte von Animationsfilmen eingegangen, wie sie bereits in Kapitel 3.1 beschrieben wurde. Essentiell ist die Aussage, dass heutzutage Animationsfilme komplett am Computer erstellt werden und eine Methode, genannt „Interpolation“, verwendet wird, damit nicht mehr so viele einzelne Bilder angefertigt werden müssen. Das bedeutet, dass alle Punkte von zwei Hauptbildern (auch Keyf-

rames genannt) durch Funktionen ineinander übergeführt werden und so Bewegungen dargestellt werden. Diese Interpolation wird in den mathematischen Modellen des CAMMP days verwendet, wobei in jedem Schritt eine andere Art der Interpolation genutzt wird.
Bevor die SuS selbst arbeiten können, wird das Vorhaben des Moduls auf den zuvor kennengelernten Modellierungskreislauf übertragen. Dabei ist die reale Situation die Animation eines springenden Balles. Damit alle SuS diese Bewegung vor Augen haben, wird ein Flummi ein paar Mal auf einem Pult springen gelassen. Anhand dieser Bewegung wird mit den SuS zusammen erarbeitet, welche Punkte für die Interpolationen als Keyframes verwendet werden könnten. Hier ist es wichtig, darauf einzugehen, dass sich bei dem erstellten Koordinatensystem mit den Keyframes die Zeit auf der x-Achse befindet, da dies sonst für Missverständnisse sorgen könnte. Stehen die Keyframes fest, so wird noch gemeinsam diskutiert, welche Verbindungsmöglichkeiten der Punkte die SuS kennen. Nach dieser kurzen Erarbeitungsphase im Plenum haben die SuS einen weichen Einstieg in die Aufgabenblätter.

4.3.3. MATLAB- und Synfig-Vorstellung

Um den SuS den Einstieg in die Arbeit mit MATLAB und Synfig zu erleichtern, werden beide Programme nach dem Problemstellungsvortrag kurz erklärt.
Im Rahmen der Vorstellung von MATLAB wird bereits die später verwendete Datei *Animationsfilme.m* (siehe Anhang D) verwendet. Es soll darauf eingegangen werden, dass MATLAB im Workshop als ein großer Taschenrechner verwendet wird. Dabei arbeiten die SuS hauptsächlich im Editor-Fenster in der Mitte. Dort ist eine Art Lückentext vorhanden, in den die SuS an den Stellen der NaNs (Not a Number) ihre aufgestellten Formeln eingeben. Diese können sie von MATLAB überprüfen lassen, indem sie auf „Run-Section" klicken. Dies soll an einer falschen Formel für das erste Aufgabenblatt einmal vorgeführt werden. Dabei kann bspw. *hp = @(i, k, tp) 2*t(i)* eingegeben werden. So sehen die SuS, wo genau sie hinklicken müssen und wie die Rückmeldung von MATLAB aussieht. Dabei kann auch auf das sich neu öffnende Fenster eingegangen werden, in welchem später die Animationen zu sehen sein werden. Als letzte Tatsache sollte erwähnt werden, dass bei Funktionen, wie bspw. *hp = @(i, k, tp)*, die Parameter, welche innerhalb der Funktion genutzt werden sollten, in der Klammer stehen.
Auch bei der Vorstellung von Synfig soll lediglich auf das Wichtigste eingegangen werden. Dazu sollen alle einzelnen Schritte anhand eines kleinen Beispieles, bspw. zwei einzelner Kreise, vorgeführt werden. Zu Beginn sollte erwähnt werden, dass Synfig zur Erstellung von Animationen verwendet wird und die SuS auch im Laufe des CAMMP days mehrere eigene Animationen erstellen werden. Dabei geschieht die meiste Arbeit im großen, mittleren Fenster. Dort werden die Animationen erstellt und Gegenstände hin- und hergeschoben. Zur Demonstration sollten zwei Kreise erstellt werden. Beinhaltet die Animation mehrere Gegenstände, kann unten rechts der Gegenstand ausgewählt werden, der verschoben oder verändert werden soll. Dies soll ebenfalls demonstriert werden, indem einer der Kreise ausgewählt und verschoben wird. Als nächstes wird

gezeigt, wie Animationen erstellt werden. Dafür muss der Animationsmodus aktiviert werden, indem auf das grüne Männchen geklickt wird. Nachdem die verwendete Interpolationsart festgelegt wurde, kann durch das Erstellen einzelner Keyframes, über das Plus-Zeichen unten links, eine Animation erstellt werden. Auch diese zwei Schritte sollten den SuS einmal demonstriert werden, damit sie den groben Ablauf bereits einmal gesehen haben.

4.3.4. Ein erstes Modell (Blatt 1) und Zusatzmaterial

Nachdem die Problemstellung im Problemstellungsvortrag ausführlich dargestellt und die verwendeten Programme vorgestellt wurden, steigen die SuS mit Arbeitsblatt 1 (siehe Anhang C.1) direkt mit der Erstellung eines ersten mathematischen Modells ein. Damit es bei späteren Aufgabenblättern weniger mathematische Schwierigkeiten gibt, sollen die SuS als Vorarbeit die einzelnen Keyframes durchnummerieren. Dies wird vor allem im dritten Arbeitsblatt (siehe Anhang C.11) wichtig sein.
In der ersten Aufgabe werden die SuS an die lineare Interpolation herangeführt. Das bedeutet, dass sie für zwei benachbarte allgemeine Punkte P_i und P_{i+1} die Geradengleichung, die durch beide Punkte verläuft, aufstellen sollen (siehe Kapitel 3.2.1). Die lineare Interpolation wurde als erste Interpolationsart ausgewählt, da sie, verglichen mit den anderen Interpolationsarten, zum einen die größte Vereinfachung der Bewegung darstellt, und da die lineare Verbindung zweier Punkte zum anderen eine Methode ist, die die SuS seit der siebten Klasse kennen. Haben die SuS bei diesem Schritt Schwierigkeiten, liegen vier verschiedene Hilfekarten (siehe Anhang C.2.1) aus, die den SuS eine im Niveau gestaffelte Hilfe bieten. Damit ist gemeint, dass Hilfekarte 1 nur eine geringe Hilfe bietet. Auf den weiteren Hilfekarten werden die Lösungshilfen immer konkreter. Im weiteren Verlauf wird auf diese Art der Hilfe durch das Prinzip der gestaffelten Hilfe verwiesen. Dabei wird den SuS immer so wenig Hilfe wie nötig gegeben (siehe Kapitel 2.4).

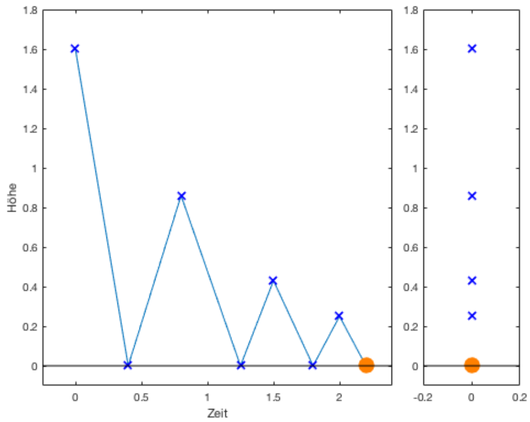


Abbildung 16: Beide Animationen, die von MATLAB geöffnet werden, nachdem die lineare Interpolation durchgeführt wurde.

Wurde die allgemeine Gleichung aufgestellt, so wird auf dem Arbeitsblatt erklärt, dass

wegen der Unabhängigkeit der Gleichung von einzelnen Punkten die Gleichung für alle acht Keyframes verwendet werden kann. Die SuS haben in der symbolischen Ebene nach Bruner gearbeitet. Die Gleichung muss in MATLAB eingetragen werden und, nachdem der Teil des Codes ausgeführt wurde, erstellt MATLAB eine Animation. Dies stellt die ikonische Ebene des E-I-S Modells nach Bruner (siehe Kapitel 2.3) dar. Dabei sehen die SuS zwei Animationen: Die linke Animation (siehe Abbildung 16 links) zeigt die Bewegung des Balles als Funktion in Abhängigkeit von der Zeit. Dieser Graph entsteht im Zeit-Höhen Koordinatensystem, für welches die SuS geeignete Keyframes gewählt haben. In der zweiten Animation (siehe Abbildung 16 rechts) verändert sich nur die Höhe des Balles in Abhängigkeit von der Zeit, aber die Zeit wird nicht mehr zusätzlich auf der x-Achse dargestellt. So wird hier die tatsächliche springende Bewegung eines Balles dargestellt, die man erwarten würde. Dadurch, dass beide Animationen erscheinen, haben die SuS zwei Möglichkeiten, um ihr Ergebnis zu interpretieren. Zum einen sehen sie den Graphen, der durch die lineare Interpolation entsteht, und können anhand dessen überlegen, ob der Graph der Zeit-Höhe Funktion der tatsächlichen Bewegung entsprechen könnte. Dabei können sie bspw. physikalische Gesetzmäßigkeiten, wie die Erdanziehungskraft, einbeziehen. Zum anderen sehen die SuS den springenden Ball und können die „hoch und runter“ Bewegung mit der tatsächlichen Bewegung aus dem Experiment aus dem Problemstellungsvortrag vergleichen.
In der zweiten Aufgabe des ersten Arbeitsblattes wird die erstellte Animation nun interpretiert. Übertragen auf den Modellierungskreislauf haben die SuS durch die Bearbeitung dieser Aufgabe den letzten Schritt absolviert. Nach der Beurteilung der Qualität der Bewegung des animierten Balles sollen Verbesserungsvorschläge entwickelt werden, welche in der Sicherungsphase besprochen werden. Zusätzlich sollen sich die SuS Situationen überlegen, in denen die lineare Interpolation eine sinnvolle Beschreibung der Bewegung darstellt. Obwohl die lineare Interpolation kein sinnvolles mathematisches Modell für einen springenden Ball darstellt, gibt es andere Situationen, die dadurch gut modelliert werden können. Ein Beispiel dafür ist die Bahn eines fliegendes Flugzeuges.
Um den Workshop abwechslungsreich zu gestalten, erstellen die SuS in der dritten Aufgabe selbst eine Animation mit Hilfe einer zweiten Software, Synfig. Dabei soll ein Auto über eine gerade Straße fahren. So sehen die SuS, dass das Erarbeitete tatsächlich schon für die Erstellung von gleichmäßigen Bewegungen eingesetzt werden kann.

4.3.5. Erste Sicherungsphase

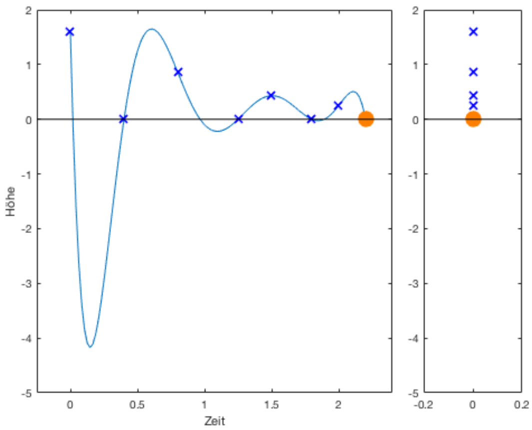
Aufgabe 1 wird mit Hilfe einer vorgefertigten Overheadfolie (siehe Anhang C.2.4) besprochen. Dazu soll ein freiwilliger Schüler / eine freiwillige Schülerin den Graph der erstellten Animation in das Koordinatensystem der Folie zeichnen. Zusätzlich soll die allgemeine Geradengleichung angegeben und erklärt werden. Das heißt, dass auf die einzelnen Bestandteile der Gleichung eingegangen werden soll, damit SuS, die Schwierigkeiten hatten, eine Chance erhalten, die Funktion nachzuvollziehen. Dafür soll die Herleitung kurz skizziert werden: Wie wurden die Steigung und der y-Achsenabschnitt bestimmt? Bevor weiter besprochen wird, muss darauf geachtet werden, dass die Folie

lange genug aufliegt, damit SuS, die die Lösung noch nicht erarbeitet hatten, die Lösung notieren können. Dadurch wird sichergestellt, dass sie die Chance erhalten, die korrekten Gleichung in MATLAB einzugeben, um die erstellte Animation einmal sehen zu können.
Im Anschluss folgt der Zwischenvortrag (siehe Anhang C.4), in welchem der Modellierungskreislauf erneut gezeigt wird, um darzustellen, was die SuS bereits geschafft haben. Zu jedem Schritt wird wiederholt, was in Bezug auf den springenden Ball getan wurde. So ist das mathematische Modell durch die Geradengleichung der lineare Interpolation erstellt worden und die Animation muss in Bezug auf die ausgehende, reale Situation interpretiert werden. An dieser Stelle können die SuS ihre Überlegungen aus Aufgabe 2 einbringen. Die Beurteilung der Qualität der Animation (siehe Kapitel 3.2.1) soll an dieser Stelle sehr ausführlich sein. Weitere Antwortmöglichkeiten können Folgende sein: Die Beschleunigung an den Extrema ist falsch. Der Ball bleibt eine gewisse Zeit am Boden, während er sich verformt und die Beschleunigung sich umdreht. Richtung Hochpunkt wird er langsamer, was ebenfalls nicht zu sehen ist.
Trotz der vielen Verbesserungsmöglichkeiten kann gesehen werden, dass durch den ersten Durchlauf des Modellierungskreislaufs schon eine erste Annäherung an die Bewegung eines springenden Balles erreicht wurde. Übertragen auf die Modellierungsspirale (siehe Kapitel 2.2.3) sind die SuS einer optimalen Lösung ein Stück näher gekommen. Da die Animation aber nicht der Bewegung eines springenden Balles entspricht, wird schließlich gemeinsam überlegt, an welcher Stelle beim Durchlaufen des Modellierungskreislaufs ein Fehler unterlaufen ist. An dieser Stelle wird im zweiten Arbeitsblatt gestartet. In diesem Fall wird im Schritt der Vereinfachung wieder eingesetzt.
Zuletzt wird die in Synfig erstellte Animation besprochen. Dabei wird auf Schwierigkeiten eingegangen und eine Musterlösung vorgestellt. Diese wird in Synfig geöffnet und einmal gezeigt. So können die SuS ihre Animation mit der Vorgestellten vergleichen und selbstständig entscheiden, ob die Erstellung erfolgreich war oder sie nach Fehlern suchen müssen. Alternativ kann die Besprechung interaktiver durchgeführt werden, indem freiwillige SuS für alle sichtbar in Synfig erneut die Animation erstellen, damit alle SuS alle notwendigen Schritte verfolgen können. Die zweite Art der Besprechung sollte, wenn möglich, immer gegenüber der ersten bevorzugt werden.

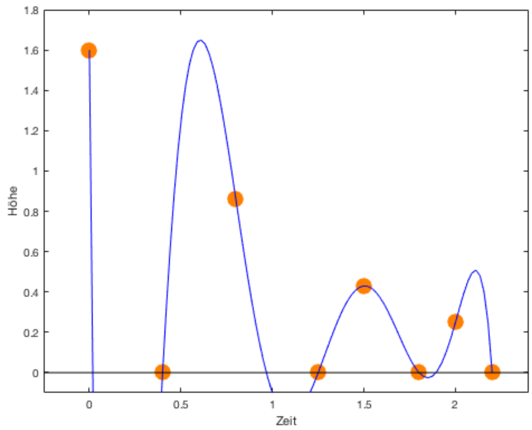
4.3.6. Erste Modellverbesserung (Blatt 2) und Zusatzmaterial

Nachdem im ersten Blatt festgestellt wird, dass die lineare Interpolation für die Bewegung eines springenden Balles kein ausreichend präzises mathematisches Modell darstellt, wird mit der Bearbeitung des zweiten Arbeitsblattes (siehe Anhang C.6), also der ersten Modellverbesserung druch die Polynominterpolation, begonnen. Das bedeutet, dass durch alle Keyframes ein Polynom mit Grad ≥ 2 gelegt wird. Dies sollte den SuS bekannt vorkommen, da sie in der Schule häufig mit solchen Aufgaben (wenn auch mit weniger Punkten) in Form von Steckbrief-Aufgaben (vgl. Barzel, Büchter & Leuders, 2011, S. 208), konfrontiert werden. Zudem werden nach Geraden, Polynome höheren Grades behandelt. Sie sollten also die Herangehensweise bereits gut beherrschen und diese somit auf ein Polynom höheren Grades übertragen können.

Als Einstieg und Heranführung an die zu betrachtende ganzrationale Funktion sollen die SuS den Grad des Polynoms bestimmen, das die Keyframes interpolieren wird, welcher neun beträgt. Für diesen Aufgabenteil liegen zwei verschiedene Hilfekarten (siehe Anhang C.7.1) aus, so dass die SuS selbst entscheiden können, ob sie Unterstützung benötigen oder weiter überlegen wollen. Dabei wird wieder das Prinzip der gestaffelten Hilfe verwendet, da die zweite Hilfekarte für den Aufgabenteil mehr Unterstützung liefert als die erste.
Danach sollen die SuS anhand der Normalform ein Gleichungssystem erstellen, wie es in Kapitel 3.2.2 vorgestellt wurde. Dieses Verfahren kennen die SuS aus der Schule. Da auch hier einige SuS Schwierigkeiten haben könnten, das bekannte Schema ohne Vorlage auf ein Polynom neunten Grades anzuwenden, liegen für den Schritt der Aufstellung des Gleichungssystems noch einmal zwei Hilfekarten bereit. Hilfekarte 7 (siehe Anhang C.7.1) dient lediglich zur Auffrischung des allgemeinen Vorgehens zur Bestimmung der Koeffizienten eines Polynoms und Hilfekarte 8 beschreibt genau, was die SuS tun sollen, um anhand der Normalform das Gleichungssystem aufstellen zu können.



(a) Abbildung der erstellten Animationen im Zeit-Höhe Koordinatensystem (links) und ohne Abhängigkeit der Zeit (rechts)



(b) Ausschnitt des Zeit-Höhe Koordinatensystems

Abbildung 17: Ausgabe von MATLAB nach der Polynominterpolation

Das Gleichungssystem muss schließlich in MATLAB eingegeben werden, wozu die Gleichungen alle zu Nullgleichungen ($\ldots = 0$) umgeformt werden müssen. MATLAB erzeugt als Ergebnis zwei Animationen und einen Graph (siehe Abbildung 17). Dabei befinden sich die Animationen wieder, wie in Aufgabenblatt 1, nebeneinander. Da der Graph, der bei der Polynominterpolation entsteht, sehr starke Ausschwenkungen aufweist, wird die Animation für einen großen Ausschnitt (y-Achse: -5 bis 2) gezeigt, um den kompletten Graph sehen zu können. Das führt jedoch dazu, dass kleine Bewegungen in y-Achsen Richtung kaum wahrzunehmen sind. Deshalb wird im Anschluss der Ausschnitt des Graphen der Funktion gezeigt, der auch bei Aufgabenblatt 1 verwendet wurde. So kann deutlich gesehen werden, wie sich der Graph tatsächlich bei den

einzelnen Keyframes verhält, was zur erfolgreichen Bearbeitung der nächste Aufgabe eine Voraussetzung ist.
Die zweite Aufgabe von Blatt 2 dient wieder der Interpretation der erstellten Animation. So soll die Qualität der Animation in Bezug auf die Bewegung eines springenden Balles beurteilt werden. Nachdem die SuS die Animation interpretiert haben, wird geschaut, inwiefern die Polynominterpolation durch die Anzahl der vorgegeben Keyframes beeinflusst wird. Dazu werden zwei Keyframes hinzugefügt, durch die das Polynom ebenfalls laufen soll. Wie in Kapitel 3.2.2 erklärt wurde, nähert sich das Polynom jedoch nicht dem gewünschten Graph an.

4.3.7. Zweite Sicherungsphase

Aufgabenblatt 2 wird ebenso wie Aufgabenblatt 1 anhand einer vorbereiteten Overheadfolie (siehe Anhang C.2.4) besprochen. Dafür stellt ein freiwilliger Schüler / eine freiwillige Schülerin die Lösung vor. Dieser / diese soll den Graph in das Koordinatensystem einzeichnen. Wichtig ist hierbei, dass erkannt wird, dass der Graph über den vorgegebenen Platz des Wertebereichs im Koordinatensystem hinausläuft. Auf der Folie wird nur der kleine Ausschnitt des Koordinatensystems gezeigt, welcher auch nach der erstellten Animation zur Darstellung des Graphen in einer Abbilung (siehe Abbildung 17b) von MATLAB gezeigt wird.
Zusätzlich soll die allgemeine Normalform des gesuchten Polynoms aufgeschrieben werden. Dazu gehört ebenfalls die Erklärung, welche Umformungen nötig waren, um zu dem gezeichneten Graphen zu gelangen. Da zur Erstellung des Gleichungssystems acht Mal die gleiche Gleichung, jedoch mit sich änderndem t_i, verwendet wird, reicht es aus, wenn zusätzlich zur Normalform eine Gleichung des Gleichungssystems als Nullgleichung notiert wird. So können SuS, die noch nicht so weit gekommen waren, die Gleichung abschreiben und für die anderen t_i umschreiben. Es muss sicher gestellt werden, dass den SuS klar ist, dass die Keyframepunkte in das Polynom eingesetzt werden, da das Polynom gerade durch diese Punkte laufen soll.
Nachdem die SuS ausreichend Zeit hatten, die Gleichung abzuschreiben, wird die zweite Aufgabe, wie nach Aufgabenblatt 1 auch, im Rahmen eines Zwischenvortrags (siehe Anhang C.7) besprochen. Zunächst wird den SuS durch das erneute Darstellen des Modellierungskreislaufs klar, dass sie ihn schon ein zweites Mal durchlaufen haben. Zudem wird noch einmal aufgezeigt, welcher Aufgabenteil welchen Schritt im Kreislauf darstellt. Darüber hinaus sind die SuS - übertragen auf die Modellierungsspirale - einer optimalen Lösung wieder einen Schritt näher gekommen, da die Animation nun ‚glatter' verläuft.
Zu jedem Schritt wird hervorgehoben, was in Bezug auf die Animation eines springenden Balles getan wurde. Die ersten beiden Schritte sind weiterhin so wie in dem Problemstellungsvortrag und auch in der ersten Besprechung. Dies wurde auch schon in der ersten Sicherung geklärt, da herausgefunden wurde, dass die Verbesserungsmöglichkeit in dem Schritt der Vereinfachung liegt. Deshalb wird an diesen Punkt mit neuen Ergebnissen angeknüpft. Der erste Unterschied ist also im vereinfachten Modell, welches nun durch die Polynominterpolation erstellt wurde. Durch das Aufstellen eine

Gleichungssystem, wird das mathematische Modell entwickelt. Die daraus resultierende Animation muss in Bezug auf die ausgehende, reale Situation interpretiert werden. An dieser Stelle stellen die SuS ihre Überlegungen aus Aufgabe 2 vor. Dabei wird zunächst die Qualität der Animation ausführlich diskutiert. Es ist vor allem erkenntlich, das die Animation keinen Sinn in Bezug auf die Bewegung eines springenden Balles ergibt, da der animierte Ball 4 m in den Boden eindringt. Zusätzlich gibt es Hochpunkte, welche höher als der Punkt sind, an dem der Ball fallengelassen wird. Und auch im weiteren Verlauf des Graphen sollten die Hochpunkte immer niedriger als die davor liegenden Hochpunkte sein. Dies ist nicht der Fall. Zudem läuft der Graph zwar durch die Keyframes, jedoch sollte das Polynom gerade an diesen Stellen Hoch- bzw. Tiefpunkte aufweisen.
Die Untersuchung, wie das Verhalten des durch die Polynominterpolation entstehende Polynom durch das Hinzufügen weiterer Keyframes beeinflusst werden kann, zeigt, dass das Polynom noch größere Ausschläge aufweist (siehe Abbildung 9 in Kapitel 3.2.2). Somit ist die Polynominterpolation für die Erstellung von Animationen nicht geeignet. Der Graph des durch die Polynominterpolation entstehenden Polynoms ist stark von der Anzahl der betrachteten Punkte abhängig, was bei der Erstellung einer Animation wenig vorteilhaft ist. So gibt es keine Situationen, die sinnvoll durch die Polynominterpolation animiert werden können.
Nach der ausführlichen Interpretation wird geschaut, an welchem Schritt beim nächsten Durchlauf im Modellierungskreislauf wieder angesetzt werden muss, um das Modell zu verbessern. Dies ist erneut die Stelle der Vereinfachung.

4.3.8. Zweite Modellverbesserung (Blatt 3) und Zusatzmaterial

Da der Graph des Polynoms der Polynominterpolation glatter ist als der Graph der linearen Interpolation wird der Polynomgedanke im dritten Aufgabenblatt (siehe Anhang C.11) nicht vollständig verworfen, sondern abgeändert. So wird nicht mehr ein Polynom gesucht, das durch alle Punkte gelegt wird, sondern es werden je zwei benachbarte Punkte durch kubische Polynome interpoliert, wie es in Kapitel 3.2.4 erklärt wurde.
Insgesamt müssen sieben kubische Gleichungen bestimmt werden (siehe Kapitel 3.2.3). Zur Bestimmung jeder kubischen Gleichung müssen vier Gleichungen aufgestellt werden, da jede vier unbekannte Koeffizienten enthält. Zwei Gleichungen lassen sich durch das Einsetzen der beiden Punkte, durch die das Polynom läuft, in die Normalform der kubischen Gleichung festlegen. Die anderen beiden bestehen aus der Ableitung der Normalform und den darin eingesetzten beiden Punkten. Das Gleichungssystem wird in Form von Nullgleichungen in MATLAB eingegeben und überprüft.
Nun geht es im nächsten Schritt darum, die Ableitungen in den Keyframepunkten sinnvoll zu bestimmen, so dass die entstehende Animation am Ende möglichst der Bewegung eines springenden Balles entspricht. Dazu muss man sich überlegen, dass die Ableitung in den Keyframepunkten mit ungeradem Index (Punkt 1, Punkt 3, Punkt 5, Punkt 7 und Punkt 9) gleich Null ist, da es sich um Hochpunkte handelt. Bei den Punkten mit geradem Index jedoch handelt es sich um Tiefpunkte (siehe Abbildung

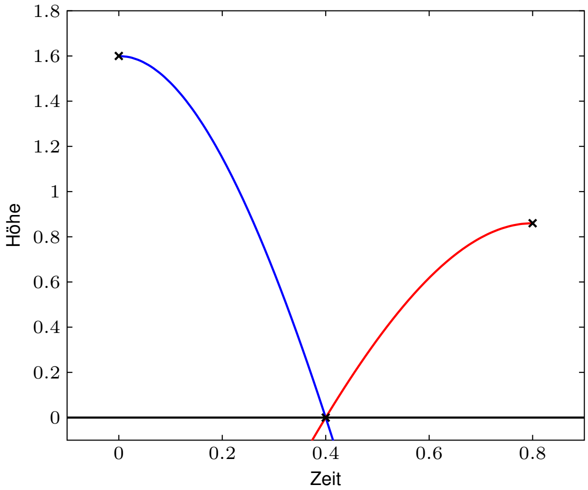
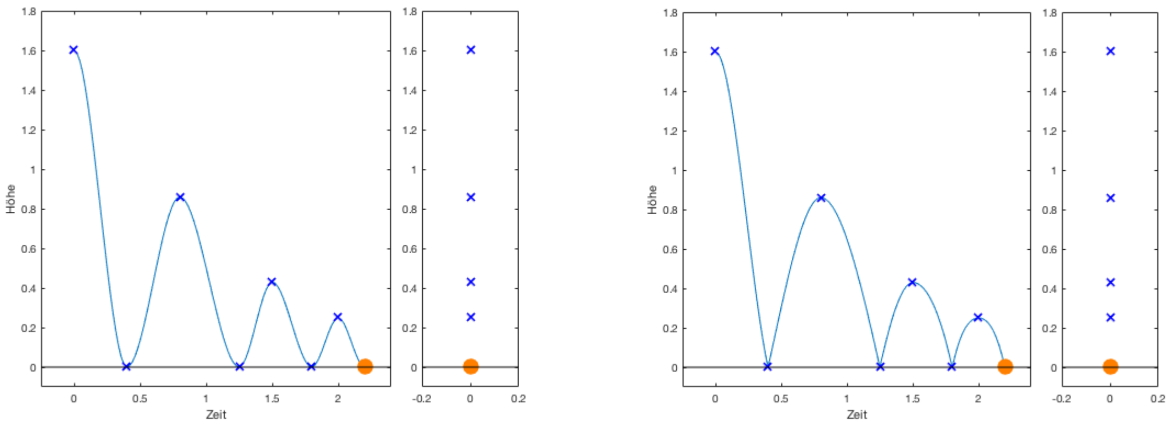


Abbildung 18: Exemplarischer Tiefpunkt zur Bestimmung der Ableitungen

18). Genauer handelt es sich um lokale Minima, da die Funktion in der Umgebung dieser Stellen, im vorgegebenen Definitionsbereich, keine kleineren Werte annimmt. Die Ableitung ist hier jedoch anders als bei den Hochpunkten ungleich Null. Haben die SuS hier Schwierigkeiten, so stehen ihnen drei verschiedene Hilfekarten zur Verfügung. Zum einen liegt eine gestaffelte Hilfe vor, so dass sich die SuS immer konkretere Hilfen holen können. Zum anderen werden hier verschiedene Lerntypen (siehe Kapitel 2.3) angesprochen, da Hochpunkte einmal, in Hilfekarte 10, auf symbolischer Ebene erklärt werden und bei Hilfekarte 11 auf der ikonischen Ebene gearbeitet wird (vgl. Barzel, Elschenbroich et al., 2011, S. 186). So werden möglichst vielen SuS verschiedene Möglichkeiten zum Verständnis angeboten.
Wird ein Polynom zwischen zwei Punkte P_i und P_{i+1} gelegt, wobei i ungerade ist, so ist die Steigung im geraden Punkt negativ. Ist i gerade, so ist die Steigung positiv. Dies kommt daher, dass ein springender Ball Richtung Boden immer stärker beschleunigt wird. Das führt dazu, dass der Ball auf Grund des inelastischen Stoßes nur sehr kurz auf dem Boden auftrifft und direkt wieder nach oben beschleunigt wird. Die Beschleunigung ist auf Grund der Energie- und Impulserhaltung zu Beginn sehr groß. Sie nimmt wegen der dagegen wirkenden Erdanziehung rasch wieder ab. Dies führt dazu, dass physikalische Gesetze berücksichtigt werden müssen, so dass alle Bewegungen und Phänomene tatsächlich sinnvoll abgebildet werden. Der CAMMP day ist also fächerverbindend.
Nachdem diese Überlegungen stattgefunden haben, die Ableitungen eingegeben wurden und das Gleichungssystem korrekt ist, wird geschaut, für welche Zahlen die Ableitungen an den geraden Punkten der Bewegung eines springenden Balles entsprechen. Dafür werden - wie im ersten Aufgabenblatt - zwei Animationen nebeneinander geöffnet (siehe Abbildung 19a).
Die Beurteilung der Qualität der erstellten Animation findet in Aufgabe 2 statt. Die Animation entspricht der Bewegung eines springenden Balles.



(a) Ableitung in allen Keyframes gleich Null gesetzt

(b) Ableitung in allen Keyframes gleich drei bzw. minus drei gesetzt

Abbildung 19: Abbildung der jeweils mit Hilfe von hermitescher Interpolation erstellten Animationen im Zeit-Höhe Koordinatensystem (links) und ohne Abhängigkeit der Zeit (rechts)

4.3.9. Dritte Sicherungsphase

Die hermitesche Interpolation wird auf der dritten Overheadfolie (siehe Anhang C.2.4) besprochen. Auch hier sollen die SuS zur Diskussion den Graphen zeichnen. Dabei können leichte Unterschiede zwischen den entstandenen Graphen verschiedener Gruppen vorhanden sein, je nachdem welche Werte für die Ableitungen in den Keyframes mit ungeraden Indizes eingesetzt wurden. Optimal sind die Werte -3 und 3, da die dadurch entstehende Animation der Bewegung eines springenden Balles am meisten ähnelt.
Nach der Erstellung der Animation sollten die SuS bei der Interpretation im Zwischenvortrag (siehe Anhang C.14) feststellen, dass die Animation schon sehr nah an der Bewegung eines springenden Balles ist. Durch diesen letzten Durchlauf durch den Modellierungskreislauf sind die SuS einer optimalen Lösung sehr nah gekommen. Veranschaulicht durch die Modellierungsspirale hat jeder Durchlauf durch den Modellierungskreislauf dafür gesorgt, dass die Lösung sich einer optimalen Lösung immer weiter annähert. Die Ballkurve ist hiermit fertig dargestellt, jedoch können noch weitere Faktoren verbessert werden. Dazu gehört bspw. die Farbveränderung durch den Lichteinfall oder die Verformung des Balles beim Aufprall auf den Boden.

4.3.10. Dritte Modellverbesserung (Blatt 4) und Zusatzmaterial

Um komplexere Animationen zu erstellen, wird eine Erweiterung der Splineinterpolation, die sogenannte TCB-Methode, verwendet. Dafür wird eine separate MATLAB-Datei verwendet, in welcher drei Punkte durch eine Funktion miteinander verbunden werden, welche drei Parameter enthält (siehe Kapitel 3.2.5). Ziel des Blattes (siehe Anhang C.16) ist es, den Einfluss dieser drei verschiedenen Parametern auf die Funktion

zu bestimmen. Durch diese Art der Verbindung von Punkten lässt sich das Polynom beliebig verformen, so dass Bewegungen beliebiger Art animiert werden können.
Im zweiten Teil des Blattes werden anhand dieser letzten Art der Interpolation von den SuS erneut zwei Animationen erstellt. Einmal soll ein Auto eine kurvige Straße entlang und beim zweiten Mal, soll ein Auto über ein Autobahnkreuz fahren. Dafür liegen vorbereitete Dateien bereit. Die SuS müssen sich sinnvolle Keyframes überlegen, so dass das Programm beim Verwenden der TCB-Methode das Auto über die Straße fahren lässt. Durch diese Aufgaben wird die Thematik von einer komplett anderen Seite beleuchtet, da nicht mehr die Mathematik im Vordergrund steht, sondern das geschickte Wählen der Keyframes. Dabei können die SuS erkennen, dass je nach Wahl der Keyframes unsinnige Animationen entstehen.
In der vierten und letzten Aufgabe sollen die SuS nun selbstständig eine Animation im Programm Synfig erstellen. Diesmal liegt keine vorgefertigte Datei vor, sondern die SuS müssen sich selbst überlegen, was sie animieren wollen. Der Einstieg im Umgang mit dem Programm wurde durch die drei schon angefertigten Animationen erleichtert. Als Hilfe gibt es eine Anleitung (siehe Anhang C.17), in der noch einmal einzelne Schritte erklärt werden (siehe Kapitel 4.3.14). Ziel der Animation ist es, dass den SuS bewusst wird, dass die kennengelernten Interpolationsarten tatsächlich sinnvoll zur Erstellung von Animationen verwendet werden können. Zudem haben die SuS so am Ende des Tages, abgesehen von den vielen Erkenntnissen und positiven Erfahrungen, ein Ergebnis und Produkt, das sie zum einen komplett selbst erstellt haben und zum anderen mit nach Hause nehmen können.

4.3.11. Vierte Sicherungsphase

Die vierte Sicherungsphase findet mit Hilfe von MATLAB statt. Auf dem Präsentationslaptop wird die von den SuS bearbeitete Datei geöffnet und die Ergebnisse werden gemeinsam besprochen. So wird der Einfluss der verschiedenen Parameter bei der TCB-Methode für alle sichtbar gemacht. Dafür sollen die SuS ihre Ergebnisse vorstellen und parallel dazu tippt einer der Dozenten Beispielzahlen in das GUI (Graphische Benutzeroberfläche) ein. So können die Ergebnisse direkt überprüft und kritisch hinterfragt werden.
Im Anschluss daran wird besprochen, worauf bei der Erstellung der zwei vorbereiteten Animationen geachtet werden musste. Dadurch soll sichergestellt werden, dass die Animationen bei allen funktioniert haben. Zum Vergleich wird hier ebenfalls noch einmal die Musterlösung in Synfig gezeigt.
Bevor die Abschlussdiskussion gestartet wird, können die SuS mitteilen, was sie selbst Interessantes animiert haben. Fertige Animationen können auf dem Präsentationslaptop gezeigt werden.

4.3.12. Abschlussdiskussion

Die Abschlussdiskussion (siehe Anhang C.19) dient als Abschluss des Tages, in der den SuS noch einmal vor Augen geführt wird, was sie geschafft haben. Es werden nach-

einander alle erarbeiteten Graphen von Animationen gezeigt, damit zusätzlich gesehen werden kann, dass mit jedem Schritt der Graph der Bewegung eines springenden Balles mehr ähnelt und somit die Lösung einer optimalen Lösung jedes Mal näher kommt.
Zusätzlich dient die Abschlussdiskussion auch dazu, zu besprechen, was an der Animation dennoch verbessert werden kann, warum man sich mit der Interpolation auseinandergesetzt hat und welche Herausforderungen es bei der Erstellung von Animationsfilmen gibt.
Die Animationen können, wie auch schon ein paar Mal zuvor erwähnt, durch Faktoren wie bspw. die Sonneneinstrahlung und die daraus resultierende Farbveränderungen verbessert werden. Eine andere Möglichkeit ist die Berücksichtigung der Verformung des Balles beim Aufprall auf den Boden. Zudem müsste, damit tatsächlich ein Animationsfilm entsteht, die Animation durch eine Tonspur ergänzt werden. Dies hätte allerdings aufgrund des zeitlichen Rahmens des CAMMP days nicht umgesetzt werden können.
Die Betrachtung der Interpolation ist sinnvoll, da dadurch die Erstellung eines Animationsfilms optimiert wird. Zudem kann dadurch die Dauer der Erstellung einer Animation minimiert werden. Das führt unter anderem auch dazu, dass die Kosten verringert werden, da weniger Personalkosten anfallen.
Dennoch gibt es Herausforderungen bei der Erstellung der Animationsfilme. Zum einen ist je nach gewünschter Realitätsnähe die Komplexität der zu animierenden Figuren sehr hoch. Dabei müssen sehr viele kleine Details berücksichtigt werden, was viel Zeit kostet. Jedoch kann durch die Arbeit eine Qualität erreicht werden, dass animierte Personen kaum noch von realen Schauspielern zu unterscheiden sind.

4.3.13. Variablen-Tabelle

Den SuS liegt während des kompletten CAMMP days eine Tabelle (siehe Anhang C.2.3) vor. Diese beinhaltet eine Auflistung der Variablen, die im Laufe des CAMMP days benötigt werden. So sollen Schwierigkeiten im Umgang mit MATLAB vorgebeugt werden. Nicht alle SuS kennen sich mit dem Schreiben eines Codes aus. Viele wissen nicht, wie bestimmte Rechenoperatoren mit der Computertastatur geschrieben werden, da die Symbole anders aussehen als auf der Tastatur eines Taschenrechners. Aus diesem Grund sind zusätzlich zu den Variablen auch Rechenoperatoren aufgelistet. Die Tabelle besteht aus drei Spalten: In der ersten steht die Variable, die in MATLAB eingegeben werden soll. Die dafür notwendige Schreibweise steht in der zweiten Spalte. Die letzte Spalte beschreibt, was die Variablen bedeuten.

4.3.14. Synfig Anleitung

Als weitere Unterstützung während des CAMMP days dient die Synfig-Anleitung (siehe Anhang C.17), die verwendet wird, wenn die SuS mit Hilfe von Synfig Animationen erstellen. Die SuS können sich an dieser orientieren, um Animationen mit Synfig zu erstellen, wenn die Angaben auf den Aufgabenblättern zu den bisher erstellten Animationen nicht ausreichen. Dafür sind alle Schritte ausführlich beschrieben und an

notwendigen Stellen durch Bilder eingebunden. Zu Beginn wird erklärt, wie Grundeinstellungen für die Animation eingegeben werden. Dabei kann die Länge der Animation und auch die Anzahl der pro Sekunde zu erstellenden Bilder festgelegt werden. Zusätzlich wird in diesem Zuge der Animation ein Name gegeben und kurz beschrieben, was in der Animation zu sehen sein wird.
Die Erstellung einzelner Objekte für die Animation wird im zweiten Abschnitt erklärt. Dafür müssen Gegenstände in der Tool-Box ausgewählt werden. Deren Farbe kann anschließend noch verändert werden. Soll der Gegenstand verformbar sein, so müssen zusätzliche Einstellungen vorgenommen werden. Die notwendigen Veränderungen sind ausführlich mit kleinen Bildern in der Anleitung angegeben.
Der nächste Abschnitt beschäftigt sich mit der tatsächlichen Erstellung von Animationen. Hier wird die Interpolationsart festgelegt, die bei der Animation verwendet werden soll. Möglich sind verschiedene Arten, wobei die SuS die TCB-Methode anwenden sollten, da, wie sie gelernt haben, hier die Möglichkeit besteht, die Parameter zu verändern, so dass die Animation der gewünschten Bewegung entspricht. Wurde die Interpolationsart festgelegt, so muss der Animationsmodus aktiviert werden. Als nächstes müssen mehrere Keyframes erstellt werden. Dafür muss festgelegt werden, zu welchem Zeitpunkt der Keyframe in der Animation gezeigt werden soll. Wurden genug Keyframes erstellt, so muss der Animationsmodus beendet werden. Im Anschluss kann die erstellte Animation angeschaut werden.
Zuletzt muss die erstellte Animation gespeichert werden, damit die SuS gegebenenfalls noch eine weitere Animation erstellen können oder sie sich die Animation außerhalb von Synfig anschauen können. So können sie sich die Datei auch auf einen Stick ziehen oder ihn sich per Email schicken und können sich ein Produkt der Tages mit nach Hause nehmen.

4.3.15. Schülercode in MATLAB

Für die Arbeit mit MATLAB, einem Programmierprogramm welches genutzt werden kann, um mathematische Lösungen bspw. anhand von Simulationen oder Animationen zu veranschaulichen, ist ein Schülercode vorbereitet, der einem Lückentext (siehe Anhang D) ähnelt. Die mathematischen Formeln und Bezeichnungen müssen von den SuS ergänzt werden. Ein Ausschnitt ist hier abgebildet:

```
% t-Werte der Keyframes
t=[0 0.4 0.8 1.25 1.5 1.8 2 2.2];
% h-Werte der Keyframes
h=[1.6 0 0.86 0 0.43 0 0.25 0];

%% Blatt 1 - Aufagbe 2
hp = @(i, k, tp) NaN;

check_linear(t,h,hp);

%% 1. Modellverbesserung
% Blatt 2 - Aufagbe 1
Gleichungssystem1 = @(c,d,e,f,g,h,l,m) [NaN
```

```
                                        NaN
                                        NaN
                                        NaN
                                        NaN
                                        NaN
                                        NaN
                                        NaN];

    Funktion1 = @(X) Gleichungssystem1(X(1),X(2),X(3),X(4),
    X(5),X(6),X(7),X(8));
    Startpunkt1 = [0 0 0 0 0 0 0 0];
    t1 = fsolve(Funktion1,Startpunkt1);
```

In den ersten vier Zeilen werden die benötigten Koordinaten der Keyframes definiert. Diese werden von vornherein vorgegeben und daran sollen die SuS nichts verändern. Der Abschnitt muss vor dem CAMMP day ausgeführt werden, damit MATLAB die Werte von $\vec{t}$ und $\vec{h}$ kennt, da sie in den nächsten Aufgaben immer wieder verwendet werden.
Die SuS müssen die Aufgaben auf den Arbeitsblättern bearbeiten und anschließend ihre Formeln an den Stellen der NaNs (Not a Number) einsetzten. Im Anschluss lassen sie MATLAB den bearbeiteten Abschnitt bearbeiten und kontrollieren und bekommen in der Form einer Animation eine Rückmeldung. Anhand des Graphen aus der Animation müssen die SuS entscheiden, ob die Animation für die bearbeitete Aufgabe korrekt ist. Die Animation wird durch ein im Hintergrund laufendes Programm erstellt. Sind die Formeln der SuS nicht sinnvoll, so erscheint entweder eine Fehlermeldung im Command-Window oder die Animation verläuft nicht wie gewünscht.

4.3.16. Materialien für die Dozenten

Zusätzlich zu den vorher beschriebenen Materialien gibt es noch weitere Unterlagen, die die Dozenten als Unterstützung zur Durchführung an die Hand gegeben bekommen. Dazu gehört vor allem das methodische Konzept (siehe Anhang A), welches aus einer Auflistung der benötigten Materialien für den CAMMP day und einer Tabelle besteht, in der der grobe Ablauf des CAMMP days dargestellt wird. Damit können die Dozenten überprüfen, ob sie alle notwendigen Materialien haben und alle wichtigen Phasen des CAMMP day Ablaufs beachtet und durchgeführt haben. Vor allem steht am Anfang bei der Vorbereitung der Laptops, dass der erste Teil des Codes bereits einmal durchgelaufen sein muss, damit die SuS wie geplant arbeiten können.
Darüber hinaus gibt es zu jedem Vortrag Notizen (siehe Anhänge B.2, C.5, C.10, C.15 und C.20), in welchen beschrieben wird, was zu welcher Folie eines Vortrags gesagt werden sollte. So können alle Informationen im Vorhinein noch einmal durchgelesen werden und die Dozenten fühlen sich sicherer beim Präsentieren.
Den Dozenten liegen zusätzlich Musterlösungen zu allen Aufgabenblättern vor (siehe Anhänge C.3, C.8, C.13 und C.18). Diese können im Vorhinein durchgeschaut werden, so dass alle Lösungswege bei der Durchführung präsent sind. Zudem sind an vielen Stellen Begründungen gegeben, die eventuell auch bei der Erklärung für einen Schüler

/ eine Schülerin hilfreich sein könnten. Damit das Erfolgserlebnis nicht an der Syntax von MATLAB scheitert und die Dozenten mögliche Fehler schneller finden, gibt es zusätzlich zu ausformulierten Musterlösungen einen Mastercode, welcher die Musterlösung des Codes darstellt. So kann bei Bedarf der Code einer Schülergruppe eins zu eins abgeglichen werden.

5. Durchführung und Evaluation des Lernmoduls

Im folgenden Kapitel werden die Beobachtungen der zwei Durchführungen beschrieben, welche sich unter anderem aus der Nachbesprechung durch Dozenten, Betreuer, Studierende und Praktikanten ergaben. Am Ende eines jeden CAMMP days wurde eine Evaluation durchgeführt. Die beiden Evaluationen werden bezüglich ausgewählter Schwerpunkte diskutiert und schließlich werden die aus der Evaluation resultierenden Verbesserungen am Workshop vorgestellt.
Ergebnisse der Evaluation dienen hierbei nur als Anhaltspunkte für mögliche Verbesserungen und stellen keine Resultate empirischer Studie mit entsprechender Stichprobenzahl dar.

5.1. Evaluationsbogen

Der Evaluationsbogen (siehe Anhang D.3) wird nach jedem CAMMP day an die SuS ausgeteilt, um von diesen Rückmeldungen zu erhalten. Sie können unter anderem angeben, wie ihnen der Modellierungstag gefallen hat, was ihnen weniger gefallen hat und was sie gelernt haben. Anhand der Rückmeldungen ist es anschließend, falls notwendig, möglich, die Materialien des Moduls zu überarbeiten. Zudem geben manche SuS hilfreiche Verbesserungsideen an, über deren Umsetzung reflektiert werden kann.
Der Evaluationsbogen besteht aus mehreren Teilen (siehe Anhang D.3). Zu Beginn werden einige Daten der SuS erfragt und bestimmt, wie die SuS von dem Angebot des CAMMP days erfahren haben. Hierbei können die SuS von verschiedenen möglichen Antworten immer eine oder mehrere zutreffende Antworten ankreuzen. Anschließend wird die Bewertung des CAMMP days erfragt. SuS müssen dafür Aussagen zustimmen oder ablehnen. Sie können zwischen einer Abstufung von vier Ankreuzmöglichkeiten entscheiden: „Trifft gar nicht zu (–)„, „Trifft eher nicht zu (-)“, „Trifft zum Teil zu (+)“ und „Trifft voll zu (++)“. Im nächsten Abschnitt werden Verbesserungsideen der SuS erfragt, um diese eventuell im Modul für die nächste Durchführung berücksichtigen zu können.
Da die SuS im Laufe des Modellierungstages neue Eindrücke sammeln sollen, werden hierzu im Abschnitt „Weiterführende Fragen“ Aussagen formuliert, denen die SuS abgestuft zustimmen können. Zuletzt können die SuS angeben, was ihnen gefallen bzw. nicht gefallen hat, was sie gelernt haben und welche Schulnote sie dem CAMMP day und den Dozenten geben.

5.2. Leitende Schwerpunkte der Evaluation

Die Standardevaluation, die am Ende eines CAMMP days durchgeführt wird, wurde im Vorhinein durch Fragen erweitert, damit spezifische Aspekte in Bezug zum neu entwickelten CAMMP day zum Thema Animationsfilme abgefragt werden können. Ziel hiervon ist es, im Anschluss an die Durchführung durch die Evaluation zu erfahren, wie die SuS das Lernmodul fanden und ob sie Neues gelernt haben, um gegebenenfalls

den CAMMP day zu verbessern und entsprechend ändern zu können.
Es wurden folgende Schwerpunkte gewählt:

- **Interesse**:
  Ist der CAMMP day so konzipiert, dass das Interesse der SuS im Laufe des CAMMP days oder schon vorher wegen der Thematik geweckt wird?

- **Verständnis**:
  Verstehen die SuS den mathematischen Hintergrund von Animationsfilmen und verstehen sie die Unterschiede zwischen den verschiedenen Interpolationsarten?

- **Leerlauf**:
  Haben die SuS zwischen Aufgabenblättern zu viel zeitlichen Leerlauf und nichts zu tun, so dass sie sich langweilen?

- **Umgang mit *MATLAB***:
  Haben die SuS Schwierigkeiten im Umgang mit MATLAB, so dass sie nicht wissen, wie oder wo sie Formeln eingeben sollen?

- **Aufgaben**:
  Ist der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben unter Berücksichtigung der Heterogenität der Gruppe angemessen?

- **Modellieren**:
  Trägt der Workshop dazu bei, dass die SuS ihre Modellierungskompetenz weiter entwickeln können und wird den SuS die Rolle / Bedeutung der Modellierung in der Gesellschaft durch die gewählte Thematik bewusst(er)?

- **Verbesserungsvorschläge**:
  Was hat den SuS gefallen und was könnte noch verbessert werden, um den CAMMP day weiterzuentwickeln?

5.3. Die erste Durchführung

In diesem Unterkapitel werden die Beobachtungen der ersten Durchführung vorgestellt. Dazu gehört zu Beginn eine kurze Beschreibung der Schülergruppe. Anschließend folgt der Verlauf des durchgeführten Tages und zum Schluss werden die Ergebnisse der Evaluation besprochen, aus denen Überarbeitungen des Lernmoduls resultierten.

5.3.1. Rahmenbedingungen

Der CAMMP day wurde am 21.06.2017 mit einem Matheleistungskurs aus der Qualifikationsphase 1 vom Stiftischen Gymnasium Düren durchgeführt. Keine / Keiner hatte als zweiten Leistungskurs Physik oder Informatik. Am CAMMP day nahmen fast gleich viele Schülerinnen (9 Schülerinnen) und Schüler (10 Schüler) teil.
Der CAMMP day begann um 9 Uhr und endete gegen 15 Uhr, so dass genügend Zeit

vorhanden war und die Möglichkeit bestand, den vorbereiteten Zeitplan im methodischen Konzept einzuhalten. Die SuS haben konzentriert gearbeitet und es gab nur Kleinigkeiten, die nicht so funktioniert haben, wie gewünscht. Zum einen hatten die SuS Schwierigkeiten im Umgang mit den vielen Variablen. Vor allem die Variable t_{i+1} bereitete Schwierigkeiten, da die SuS zu Beginn nicht den Unterschied zu $t_i + 1$ erkannten. Viele dachten, dass beide Schreibweisen das gleichen bedeuten würden. Bei einigen SuS war ein kurzes Gespräch notwendig, um diese Verwirrung zu beseitigen. Zudem war den SuS die Schreibweise einiger Rechenoperatoren nicht klar, da sie noch nie mathematisch am Computer gearbeitet hatten. Sie kannten die Syntax zum Multiplizieren und Dividieren nicht, was in den benötigten Formeln häufig verwendet werden muss. Wirklich größere Schwierigkeiten gab es jedoch nur bei dem dritten Arbeitsblatt, da dort viele Schritte absolviert werden mussten, ohne dass die SuS eine Rückmeldung bekommen haben, ob die Formeln korrekt sind.
Es gab jedoch während des gesamten CAMMP days keine Situation, in der die Dozenten nicht weiter helfen konnten oder der Code fehlerhaft war.

5.3.2. Beschreibung der verwendeten Materialien

Die bei der ersten Durchführung verwendeten Materialien unterscheiden sich von den in Kapitel 4 beschriebenen und im Anhang C zu finden Materialien. Der Grund hierfür ist, dass die aktuellste und bereits verbesserte Version der Materialien vorgestellt wurde. In diesem Unterkapitel werden wichtige Unterschiede zur Version, die den SuS bei der ersten Durchführung vorlag vorgestellt.
Ein Unterschied ist, dass die SuS weniger mit Synfig gearbeitet haben, da nur eine Abschlussaufgabe auf Aufgabenblatt 4 mit Synfig zu bearbeiten war. Die Aufgaben zu den verschiedenen Strecken, die ein Auto fahren soll, gab es nicht.
Zudem gab es in MATLAB noch keine Überprüferfunktion, die den SuS Rückmeldung darüber gab, ob bei Aufgabenblatt 3 (siehe Anhang C.11) das benötigte Gleichungssystem korrekt war. Außerdem hatten die SuS zusätzlich keine Tabelle in denen die Variablen erklärt wurden. Die benötigten Schreibweisen wurden zwischen den Aufgabenteilen, in denen sie benötigt wurden, erklärt. Zudem wurden die Koordinaten der Keyframes mit x_i statt t_i und y_i statt h_i bezeichnet, da dies die übliche Beschriftung der beiden Achsen im Koordinatensystem ist. Außerdem wurde während des kompletten Tages mit zehn Keyframes gearbeitet.
Des Weiteren war Aufgabenblatt 2 (siehe Anhang C.6) anders. Da mit zehn Keyframes gearbeitet wurde, mussten die SuS bei der ersten Aufgabe zur Polynominterpolation ein Gleichungssystem mit zehn Gleichungen bilden. Im Schritt der Interpretation wurden, statt wie es in der aktuellen Version ist, zwei Keyframes weggenommen und geschaut, ob die Animation sich der gewünschten Bewegungen annähert. Zur Umsetzung des zweiten Gleichungssystems wurden zwei neue Listen mit den Koordinaten alle Keyframes definiert. Dies führte dazu, dass die SuS das komplette Gleichungssystem neu schreiben mussten, da sie die neuen Namen verwenden mussten.
Ein letzter Unterschied, war dass die SuS bei den Zwischenvorträgen, zur Besprechung der Arbeitsblätter, nicht selbst reflektieren mussten. Die Vorträge wurden als Vorträge

vorgetragen und kaum interaktiv gestaltet.

5.3.3. Ergebnisse der Evaluation

Im folgenden wird nun die Evaluation anhand der Schwerpunkte diskutiert:

Interesse:
Im Laufe des CAMMP days wurde beobachtet, dass vor allem zu Beginn alle SuS konzentriert und begeistert gearbeitet haben, was auf Interesse hindeutet. Richtung Ende nahm dies jedoch etwas ab. In der Evaluation wurde das Interesse der SuS in erster Linie anhand der Aussage „Mich hat das Thema Animationsfilme interessiert." abgefragt. Hier gaben 5 % sehr großes Interesse an und 58 % weitere großes Interesse. Jedoch fanden 37 % das Thema weniger interessant. Die Rückmeldung zur Frage „Durch diesen Kurs hat sich mein Interesse an den behandelten Themen erhöht" zeigt, dass dies nicht erfüllt werden konnte. Der CAMMP day hat es nicht geschafft, bei den SuS größeres Interesse hervorzurufen.
Dass nicht alle SuS begeistert waren, spiegelt sich auch bei der Frage nach einer möglichen Verbesserung des Workshops wieder. Hier wurde zwei Mal notiert, dass das Lernmodul interessanter werden sollte. Zudem gab es vier Kommentare bezüglich mehr Abwechslung, was ebenfalls zum Wecken des Interesses beitragen würde.

Verständnis:
Ein Ziel des Lernmoduls war es, den mathematischen Hintergrund von Animationsfilme zu vermitteln. Das bedeutet, dass die SuS die verschiedenen Interpolationsarten verstehen sollten. Dazu gehört auch, dass sie die Unterschiede zwischen den Arten verstanden haben. Bei den Besprechungen kamen sehr viele Rückmeldungen, welche zeigten, dass die SuS über die mathematischen Grundlagen nachgedacht und diese verstanden haben. Die Evaluation zeigt, dass die SuS Interpolation verstanden haben. Hier haben 79 % voll oder teilweise zugestimmt. Nur 21 % haben angegeben, Interpolation nicht verstanden zu haben. Zudem sind die Unterschiede zwischen den Interpolationsarten nicht allen SuS klar geworden. 37 % gaben an, eher nicht die Unterschiede verstanden zu haben. 47 % haben angekreuzt, dass sie die Unterschiede zum Teil verstanden haben, und 16 % vollständig.

Leerlauf:
Das Lernmodul soll so konzipiert sein, dass die SuS keinen Leerlauf haben. Das bedeutet, dass es keine Momente geben soll, in denen SuS sich langweilen, weil sie nichts zu tun haben. Dies könnte zwischen Aufgabenblättern geschehen, da die Heterogenität in Lerngruppen sich unter anderem häufig durch unterschiedliche Lerntempi auszeichnet. Bei der Durchführung wurde beim Durchgehen durch die Reihen und beim Helfen darauf geachtet, wie weit die einzelnen SuS sind, um im Anschluss an ein Aufgabenblatt ein weiteres aushändigen zu können. Dass dies erfolgreich gelungen ist, zeigt auch die Evaluation, da nur 26 % angaben, irgendwann zwischendurch Leerlauf gehabt zu haben. 32 % gaben an, gar keinen Leerlauf gehabt zu haben und 42 % hatten eher wenig

Leerlauf. Dieses Ergebnis ist zufriedenstellend.

Umgang mit *MATLAB*:
MATLAB begleitet die SuS durch den kompletten Tag, weshalb wichtig ist, dass den SuS der Umgang mit MATLAB möglichst erleichtert und intuitiv gestaltet wird. Bei der Einführung in MATLAB waren alle SuS sehr aufmerksam. Das kurze Vorstellen von MATLAB wurde sehr positiv wahrgenommen. Nur 5 % der SuS empfand die MATLAB Einführung als nicht hilfreich.
Während der Durchführung wurden trotzdem, wie bereits oben beschrieben, Probleme im Umgang mit MATLAB beobachtet. Die SuS hatten bei der Eingabe der Formeln und Variablen Schwierigkeiten. Dies kann damit zusammenhängen, dass in der Einführung lediglich auf den Aufbau und die Oberfläche von MATLAB, aber nicht auf Schreibweisen eingegangen wird. Aus diesem Grund fiel die Frage zu „Der Umgang mit MATLAB fiel mir schwer.“ schlecht aus. 11 % der SuS gaben eine vollkommene Zustimmung an und 53 % stimmten teilweise zu. 37 % hatten weniger Schwierigkeiten im Umgang mit MATLAB.

Aufgaben:
Um zu verhindern, dass die SuS nicht arbeiten können, weil die Aufgabenstellungen unverständlich formuliert oder zu schwer sind, wird auch dies in der Evaluation abgefragt. Dies würde den Lernprozess der SuS behindern und das Interesse mindern. Während der Durchführung wurde nicht bemerkt, dass die SuS mit den Formulierungen der Aufgabenstellungen große Probleme haben. Auffällig war, dass viele Hilfekarten verwendet wurden, wobei die SuS diese selbstständig genutzt haben.
Zur Einschätzung des Schwierigkeitsgrads der Aufgabenstellungen wurde gefragt, ob die Aufgaben zu einfach waren. Dieser Frage steht die Aussage „Die Aufgaben waren zu schwierig“ gegenüber. Bei der ersten Frage hat der Großteil der SuS (63 %) angegeben, dass die Aufgaben eher nicht zu einfach sind. Jeweils 16 % fanden die Aufgaben zu einfach und überhaupt nicht einfach. Auf der anderen Seite gaben die SuS zur Schwierigkeit der Aufgabenstellungen ein ähnliches Bild ab. 53 % der SuS fanden die Aufgaben nicht zu schwierig. 42 % fanden sie eher schwierig und 5 % stimmten der Aussage vollkommen zu.
Unter Berücksichtigung der Heterogenität, die im Lernmodul bedacht werden soll, ist das Ergebnis zufriedenstellend. Im Mittel waren die Aufgabenstellungen weder viel zu schwer noch viel zu einfach. Dazu kommt, dass den SuS bei auftretenden Schwierigkeiten Hilfekarten an die Hand gegeben wurden.

Modellieren:
Ein weiteres Ziel des CAMMP days ist die Weiterentwicklung der Modellierungskompetenz der SuS. Sie sollen ihre Problemlösefähigkeit ausbauen und auch ein tiefer gehendes Verständnis des Modellierens erlangen. Als Einstieg in das Thema wurde der Modellierungsvortrag von einem Doktoranden auf Englisch gehalten. 26 % der SuS gaben an, dass sie diesen Vortrag wenig bis gar nicht hilfreich fanden. Dies kann jedoch auch an der Sprache gelegen haben. 53 % haben angegeben, dass sie den Vortrag

teilweise hilfreich fanden und der Rest (21 %) gab an, dass der Vortrag vollkommen hilfreich war.
Der Modellierungskreislauf, der zu Beginn vorgestellt wurde, zog sich durch den kompletten Workshop und war immer wieder zu sehen und die einzelnen erarbeiteten Aufgaben wurden auf die Schritte des Modellierens bezogen. Die SuS waren in den Besprechungsphasen der Aufgaben, in denen es um die Interpretation der Animationen ging, sehr verhalten. Ein Grund dafür könnte sein, dass die SuS eventuell Schwierigkeiten hatten, die Aufgaben auf die mathematische Modellierung zu übertragen, da in der Evaluation acht SuS angaben, dass sie durch den Workshop die mathematische Modellierung nicht besser verstanden haben. 11 % der SuS haben die vollkommene Zustimmung angekreuzt und 47 % gaben an, dass die Aussage teilweise zustimmt.

Verbesserungsvorschläge:
Da das Lernmodul neu entwickelt wurde, ist die erste Durchführung interessant, da noch nicht erprobt ist, wie die SuS reagieren und welche Resonanz das Lernmodul hervoruft. Um aus der Durchführung und der Rückmeldung bestmöglich profitieren zu können, sind gerade die Verbesserungsvorschläge interessant. So kann das Modul verbessert werden, um einige Ziele besser zu realisieren und somit auch in einigen Punkten der Evaluation zufriedenstellendere Rückmeldungen zu bekommen.
Ein Verbesserungsvorschlag war, den Tag abwechslungsreicher zu gestalten. Das kann erreicht werden, indem mehr Animationsbeispiele erstellt werden dürfen. Dies würde zudem eventuell zu steigendem Interesse führen, was ebenfalls ein Vorschlag war.

5.3.4. Aus der Evaluation resultierende Verbesserungen zum entwickelten Lernmodul

Basierend auf den verschiedenen Ergebnissen der Schwerpunkte aus der Evaluation wurden Verbesserungen am Lernmodul durchgeführt, um mehr Lernzuwachs, Interesse und einen größeren Ausbau der Modellierungskompetenz bei den SuS zu erreichen:
Auf Grund des teilweise fehlenden Interesses wurde das Lernmodul durch Phasen ergänzt, in denen die SuS selbstständig mehrere Animationen erstellen können. Eine erste Phase wurde direkt nach dem Kennenlernen der linearen Interpolation eingeplant. Die SuS arbeiten somit schon sehr viel früher mit dem Programm Synfig und können ein fahrendes Auto animieren. Ebenfalls wird es am Ende des Tages mehr Möglichkeiten zur Erstellung von Animationen gegeben. Dies führt auch dazu, dass die SuS verschiedene Interpolationsarten zur Erstellung von Animationen verwenden. Vorher wurde ausschließlich die TCB-Methode verwendet. Das Interesse soll so geweckt bzw. aufrecht erhalten werden, da diese Phasen für Abwechslung sorgen und die SuS mit Hilfe ihrer Ergebnisse tatsächlich mit einer Software Animationen erstellen können. Diese Verbesserung entsprach ebenfalls einigen Verbesserungsvorschlägen der SuS, so dass die Reaktion auf die vermehrte Erstellung von Animationen hoffentlich positiv ausfällt.
Um dafür zu sorgen, dass alle SuS am Ende ein korrektes Verständnis von Interpolation haben und auch die Unterschiede zwischen den verschiedenen Interpolationen aufzei-

gen können, was bei der ersten Durchführung nicht zurück gemeldet wurde, werden die Besprechungen nach den Aufgabenblättern verlängert. Vor allem dient die Abschlusspräsentation, in der eine Rekapitulation des Tages stattfindet, gut zur Diskussion der Unterschiede sowie der Vor- und Nachteile der einzelnen Interpolationsarten. So werden alle Erkenntnisse des Tages noch einmal abgerufen und mit einander in Verbindung gesetzt.
Der Evaluation war zu entnehmen, dass nicht alle am Ende des Tages ein besseres Verständnis der mathematischen Modellierung erlangt haben. Eine längere Besprechungen könnte dazu beitragen, dass einige SuS durch den Workshop die mathematische Modellierung besser verstehen. So muss deutlicher auf jeden Schritt, der durchlaufen wird, eingegangen werden. Nach dem Durchlaufen des Kreislaufes, also nach jedem Aufgabeblatt, sollte die Besprechung in einem Gespräch stattfinden. Werden die SuS selbst aktiv und aufgefordert, selbst ihre bisherige Arbeit in Bezug zum mathematischen Modellierungskreislauf zu reflektieren, so wird ihnen stärker bewusst gemacht, wo sich ihre Ergebnisse wiederfinden lassen. So wird den SuS die Lösung nicht direkt präsentiert, sondern sie präsentieren selber. Zudem trägt häufig eine Formulierung eines Mitschülers / einer Mitschülerin zum Verständnis anderer bei, da die Wortwahl eine andere ist.
Die Rückmeldung zum Leerlauf war schon sehr positiv, jedoch wurde dennoch eine Kleinigkeit auf den Aufgabenblättern ergänzt, um noch bessere Ergebnisse zu erzielen. Jedes Blatt wurde durch eine zusätzliche Zeile ergänzt, in welcher steht, dass die SuS nach Beendigen des aktuelle Blattes nach dem Nächsten fragen sollen. So kann möglicherweise der Leerlauf noch weiter reduziert werden.
Die Hauptkritik bezüglich des Umgangs mit MATLAB war die Schwierigkeit mit Variablen. Im Laufe des Tages ist dies besser geworden, allerdings kann der Einstieg erleichtert werden, indem den SuS eine Tabelle gegeben wird, in welcher die Variablen und alle benötigten Rechenoperatoren aufgelistet sind. So können die SuS alle Schreibweisen nachschauen und wissen, wie sie in MATLAB eingegeben werden müssen.
Damit die SuS weniger Tippen mussten, wurde zusätzlich die Anzahl der verwendeten Keyframes von zehn auf acht reduziert, da anhand von acht Keyframes ebenfalls gut gearbeitet werden kann. Bei der Interpretation der Polynominterpolation wurde die Aufgabe zur Interpretation so abgeändert, dass die SuS zwei weitere Keyframes hinzufügen, statt sie wie vorher zu entfernen.
Zuletzt wird noch auf eine Verbesserung eingegangen, die auf Grund der Beobachtungen realisiert wurde. Wie bereits am Anfang des Kapitels 5.3.1 erklärt wurde, hatten die SuS Schwierigkeiten mit Aufgabe 1 vom dritten Aufgabenblatt. Die Aufgabe war so gestellt, dass die SuS viele verschiedene Schritte durcharbeiten mussten, ohne konkretes Feedback zu bekommen, ob ihre Überlegungen korrekt waren. Erst ganz zum Schluss wurde alles überprüft. Das führte dazu, dass die SuS nicht wussten, wo sie nach dem Fehler suchen sollten. Dies war für sie sehr frustrierend. Deshalb wurde eine Überprüfung des Zwischenergebnisses im MATLAB-Code eingebaut. Die Fehlersuche wird damit auf kleinere Aufgabenbereiche eingeschränkt.

5.4. Die zweite Durchführung

In diesem Unterkapitel wird nun auf die zweite Durchführung eingegangen. In dieser wurden die bereits aus der ersten Durchführung verbesserten Materialien verwendet.
Zu Beginn des Unterkapitels wird auf die Besonderheit der Schülergruppe eingegangen. Im Anschluss werden die Beobachtungen beschrieben und die Evaluation in Bezug auf die Schwerpunkte ausgewertet. Zuletzt werden aus der Evaluation und aus Gesprächen mit SuS resultierende Verbesserungen besprochen.

5.4.1. Rahmenbedingungen

Die zweite Durchführung des Lernmoduls fand am 24.08.2017 innerhalb der Sommerferien im Rahmen eines freien CAMMP days (siehe Kapitel 2.1.3) statt. Aus diesem Grund kann bereits im Vorhinein davon ausgegangen werden, dass sich größtenteils sehr motivierte und leistungsstarke SuS für den CAMMP day anmelden. Es meldeten sich fünf SuS für den Tag an. Trotz der geringen Teilnehmerzahl wurde der Tag durchgeführt, um das verbesserte Material erproben zu können.
Vier der fünf SuS hatten bereits vorher an einem CAMMP day zu einem anderen Thema teilgenommen und wussten somit ungefähr, was sie erwartet. Zwei dieser SuS begleiten CAMMP seit mehreren Jahren, da sie auch schon andere längerfristige CAMMP Projekte bearbeiten. Lediglich eine Schülerin, welche auch als einzige noch in der Qualifikationsphase 1 war - die anderen waren in der Qualifikationsphase 2 - hatte noch keinen Kontakt zu CAMMP. Sie hatte als einzige keinen Mathematikleistungskurs und geht auf die Gesamtschule. Die anderen besuchen das Gymnasium.
Bei der Schülergruppe handelte es sich somit trotz der geringen Teilnehmerzahl um eine sehr heterogene Gruppe.
Der freie CAMMP day begann um 9 Uhr und ging bis 13:30 Uhr, so dass der Zeitplan etwas angepasst werden musste. So wurde beispielsweise die Mittagspause gekürzt. Trotz weniger Zeit sind alle SuS mit allen Aufgabenblättern fertig geworden.
Trotz der kleinen Stichprobe wird die Evaluation als Indikator für die Qualität der vorgenommenen Verbesserungen genommen.

5.4.2. Beschreibung der verwendeten Materialien

Auch bei dieser Durchführung wurden nicht die in Kapitel 4 beschriebenen und im Anhang C zu finden Materialien verwendet, da diese bereits Verbesserungen, die aus der zweiten Durchführung resultierten, beinhalten. In diesem Unterkapitel werden wichtige Unterschiede zur Version, die den SuS bei der zweiten Durchführung vorlag vorgestellt.
Ein Unterschied ist, dass die Keyframes weiterhin, wie es auch bei der ersten Durchführung war (siehe Kapitel 5.3.2), x_i und y_i als Koordinaten hatten, jedoch wurden, wie auch in der endgültigen Version acht Keyframes betrachtet.
Arbeitsblatt 2 unterschied sich insofern, dass die SuS weiterhin aufgrund der neuen Definition von Listen, in denen zweit Keyframes weggenommen wurden, komplett neue Gleichungssysteme schreiben mussten.

5.4.3. Ergebnisse der Evaluation

Die SuS haben konzentriert gearbeitet und es gab keine Schwierigkeiten bei der Durchführung. Ihnen sind lediglich noch einige Stellen aufgefallen, an denen der Code oder die Arbeitsblätter umformuliert werden könnten, so dass die nächsten SuS hoffentlich noch weniger Schwierigkeiten haben. Zudem wurde angemerkt, dass die Keyframes nicht durch $P_i(x_i|y_i)$, sondern durch $P_i(t_i|h_i)$ bezeichnet werden sollten. Dadurch sollten weniger Schwierigkeiten beim Verständnis des Zeit-Höhen Koordinatensystems auftreten.
Verglichen zur ersten Durchführung hatten die SuS keine Schwierigkeiten im Umgang mit den Variablen mehr. Auch das dritte Arbeitsblatt konnte von vier SuS erfolgreich bearbeitet werden, so dass die bisher bereits durchgeführten Verbesserungen einen positiven Einfluss hatten.
Die hinzugefügten Aufgaben zur Arbeit mit Synfig wurden von den SuS sehr positiv vermerkt. Dadurch haben sie eine Anwendung der zuvor erarbeitete Mathematik gesehen. In der Evaluation wurde Synfig öfters positiv herausgestellt. Diese Verbesserung sollte ebenfalls, wie die übrigen, beibehalten werden.
Im Folgenden wird nun die Evaluation anhand der Schwerpunkte diskutiert. Hierbei werden die Ergebnisse anhand der gleichen Fragen besprochen wie bei der ersten Durchführung:

Interesse:
Das Interesse der SuS war vorhanden. Vier von fünf SuS kreuzten an, dass sie zum Teil interessiert sind und eine / einer kreuzte sehr hohes Interesse an. Im Laufe des CAMMP days wuchs bei vier von fünf der SuS das Interesse an dem Thema. Eine Schülerin / ein Schüler stimmte der Aussage „Durch diesen Kurs hat sich mein Interesse an den behandelten Themen erhöht.“ eher nicht zu. Dass den SuS der Tag gefallen hat, spiegeln die Ergebnisse der Aussagen „Ich würde wieder einen Kurs des zdi-Netzwerkes besuchen“ und „Ich würde auch anderen Schülern die Teilnahme an einem Kurs empfehlen.“ wieder. Diese wurden durchweg positiv angekreuzt, so dass jeweils zwei der fünf SuS den Aussagen vollkommen zustimmen und drei zum Teil.

Verständnis:
Das Verständnis wurde durch die bereits durchgeführten Verbesserungen erhöht. Vier der fünf SuS kreuzten an, dass sie die Interpolation vollkommen verstanden haben. Eine Schülerin / ein Schüler kreuzte an, dass sie / er eher nicht verstanden habt, was Interpolation bedeutet. Bei der zweiten Frage zur Überprüfung des Verständnisses sagten drei der fünf SuS aus, dass sie die Unterschiede zwischen den behandelten Interpolationsarten verstanden haben. Die übrigen zwei stimmten dieser Aussage sogar vollkommen zu. Nicht alle SuS haben im Laufe des Tages viel Neues gelernt, was an den unterschiedlichen Vorkenntnissen liegen kann. Jeweils zwei der fünf SuS kreuzten an, dass sie der Aussage „Ich habe in diesem Kurs viel Neues gelernt.“ eher nicht bzw. vollkommen zustimmen und eine / einer stimmte zum Teil zu.
Im Kommentarfeld zur Frage „Was hast du für dich persönlich durch die Teilnahme am

Workshop gelernt?“ wurden sehr unterschiedliche Antworten gegeben. Eine Schülerin / ein Schüler hat das Programm und den Umgang mit Synfig gelernt. Ein anderer / eine andere begriff das Erstellen und den Aufbau von Animationen. Wieder ein anderer / eine andere lernte den Einfluss der verschiedenen Interpolationsarten auf die Realitätsnähe der entstehenden Animation. Zuletzt legte eine Schülerin / ein Schüler auf eine andere Kompetenz den Schwerpunkt. Sie / er merkte, dass sie / er lernen muss, sich besser konzentrieren zu können. So haben alle SuS verschiedene Aspekte vom Tag mitgenommen.

Umgang mit *MATLAB*:
Die Rückmeldung zum Umgang mit MATLAB fiel sehr gemischt aus. Lediglich drei der fünf SuS gaben Rückmeldung auf die Aussage „Die Einführung in MATLAB war hilfreich.“. Zwei SuS stimmten der Aussage eher weniger zu und eine Schülerin / ein Schüler stimmte der Aussage vollkommen zu. Auch der Umgang fiel zwei der fünf SuS schwer und den restlichen drei weniger / gar nicht schwer. Auf Grund dieser Rückmeldung kann nichts verbessert werden, da einige so zufrieden waren und andere nicht. Dieses Bild kann auch wegen der vorherigen Teilname einzelner SuS an anderen CAMMP days entstanden sein.

Aufgaben:
Das gemischte Bild zieht sich auch durch die Aussagen zur Schwierigkeit der Aufgaben. Zwei der fünf SuS sagten aus, dass die Aufgaben überhaupt nicht zu einfach waren. Die restlichen Ankreuzmöglichkeiten wurden jeweils von einer Schülerin / einem Schüler angekreuzt. Auch die Rückmeldung zur Aussage „Die Aufgaben waren zu schwierig.“ war unterschiedlich. Zwei der fünf SuS stimmten der Aussage zum Teil zu und zwei weitere stimmten überhaupt nicht zu. Eine Schülerin / ein Schüler stimmte eher weniger zu.
Aufgrund dieser Rückmeldung kann auch hier nichts verbessert werden, da durch das Niveau der Aufgaben und den ausliegenden Hilfekarten die Heterogenität berücksichtigt wird. Bei den Verbesserungsvorschlägen wurde jedoch ersichtlich, dass einige SuS sich eine noch stärkere Berücksichtigung der Heterogenität wünschen.

Modellieren:
Die SuS fanden den Vortrag über die mathematische Modellierung hilfreich und haben auch größtenteils durch den erarbeiteten Workshop die mathematische Modellierung besser begriffen. Eine Schülerin / ein Schüler stimmte der Aussage „Durch den Workshop habe ich mathematisches Modellieren besser begriffen.“ eher nicht zu. Die übrigen SuS stimmten der Aussage vollkommen (eine Schülerin / ein Schüler) und teilweise (zwei SuS) zu.

Verbesserungsvorschläge:
Es wurden zwei Verbesserungsvorschläge von den SuS formuliert. Einer bezog sich auf die Einführung in MATLAB. Diese sollte allgemeiner sein. Der zweite Vorschlag bezog sich auf die Berücksichtigung der Heterogenität. So hat sich der Schüler / die Schülerin

weniger schreibaufwendige Aufgaben und mehr Denkaufgaben gewünscht.

5.4.4. Aus der Evaluation resultierende Verbesserungen zum entwickelten Lernmodul

Eine wichtige Verbesserung war das Abändern der Bezeichnungen der Koordinaten der Keyframes von $P_i(x_i|y_i)$ zu $P_i(t_i|h_i)$. Zusätzlich zur vorgeschlagenen Veränderung der Abänderung der x-Achse zur Zeitachse wurde auch noch das y durch die Höhe ersetzt. So haben die Formeln, die entstehen, einen größeren Bezug zur tatsächlichen Situation, die durch die Formeln animiert werden soll.
Zudem hat bisher beim Aufgabenblatt zur Polynominterpolation gestört, dass die SuS das erstellte Gleichungssystem zwar kopieren und im Anschluss wie gewünscht erweitern konnten, sie aber im Anschluss alle $t_i = x(i)$ durch $t_{neu,i} = x\_neu(i)$ ersetzten mussten. Dies wurde nun umgangen, indem in einer weiteren Verbesserung neue x- und y- bzw. jetzt t- und h-Vektoren definiert werden, so dass weiterhin mit t und h gerechnet werden kann und nicht jedes Mal jede Variable abgeändert werden muss. So überwiegt in dieser Aufgabe mehr die Denkarbeit und nicht mehr - wie zuvor - die viele Schreib- und Tipparbeit.
Aufgrund der Rückmeldung der SuS wird für die nächste Durchführung die MATLAB-Einführung so abgeändert, dass nicht nur die Oberfläche vorgestellt wird. Sichtbar für alle SuS wird in MATLAB eine Formel für die erste Aufgabe eingegeben. Dabei soll nicht die korrekte verwendet werden. Dennoch können die SuS sehen, wie die Variablen verwendet werden sollen und auf welchen Button sie zum Durchlaufen Lassen drücken müssen.
Um die Heterogenität, wie von einem Schüler / einer Schülerin gewünscht, noch weiter zu berücksichtigen, sollte zusätzlich ein Zusatzblatt erstellt werden. In diesem kann zum Knobeln auf die Physik eingegangen werden. So haben die schnellen SuS ebenfalls noch eine weitere Herausforderung und können zudem noch fächerübergreifend arbeiten.
Zuletzt ist noch aufgefallen, dass es sinnvoll wäre, ein Dokument für die Dozenten zu haben, in dem steht, auf welche Aspekte bei der Vorstellung der verwendeten Programme eingegangen werden sollte. Dies wurde erstellt, um für die nächsten Durchführungen sicherzustellen, dass alles Essentielle erwähnt wird. Zusätzlich dient die Auflistung der einzelnen Aspekte als eine Orientierung, so dass die Vorstellung der Programme strukturiert verläuft und die SuS nicht verwirrt werden. Angesiedelt wurden die Stichpunkte am Ende des *methodischen Konzepts*, da dieses Dokument auf jeden Fall von beiden durchführenden Dozenten zur Vorbereitung des CAMMP days angeschaut wird.

5.5. Fazit

Aufgrund der Möglichkeit, das erarbeitete Modul zweimal durchführen zu können, konnte es erprobt und Schritt für Schritt verbessert werden. Die erste Durchführung verlief nach einer intensiven Vorbereitung gut und, als erste Erprobung der erstellten Materialien, zufriedenstellend. Durch die daraus resultierenden eingearbeiteten Änderungen konnte der CAMMP day verbessert werden, was in der zweiten Durchführung rückgemeldet wurde. Da weitere Verbesserungsideen umgesetzt wurden, müsste das Modul erneut durchgeführt werden, um zu sehen, wie erfolgreich diese wiederum waren.

Zusammengefasst kann jedoch festgehalten werden, dass sich das Modul im aktuellen Zustand schon gut durchführen lässt. Die erstellten Materialien mit dem Code und den Vorträgen sind auf einem Stand, den die SuS ohne große Schwierigkeiten bearbeiten können. Somit wurde das Ziel der Erstellung eines Lernmoduls, das auf einen durchführbaren Stand gebracht wird, erreicht.

6. Ausblick

Auch wenn die bisherigen Durchführungen des Moduls schon gut verliefen und auch die Evaluationen zufriedenstellende Ergebnisse lieferten, gibt es dennoch Möglichkeiten, das Modul in nächster Zukunft zu verbessern und zu erweitern. Einige Möglichkeiten, die aus zeitlichen Gründen nicht mehr umgesetzt werden können, werden im Folgenden aufgelistet:
Mit MATLAB ist es möglich, die Arbeitsblätter, die momentan für jede Durchführung des CAMMP days ausgedruckt werden müssen, in den MATLAB Code in Form eines *Live-Skripts* einzubinden. Dies sähe so aus, dass die SuS in MATLAB die kurzen einführende Texte lesen könnten und anschließend im gleichen Fenster nach den Aufgabenstellungen den Code durch überlegte Formeln ergänzen könnten. Dies ist weitaus übersichtlicher, da die SuS so keinen Berg an Papieren ansammeln. Bisher lässt die aktuelle MATLAB Version nicht zu, den Code in Form eines Live-Skripts umzuschreiben, da es noch nicht möglich ist, im Rahmen dieses Skriptes Animationen zu erstellen. Sobald eine neue MATLAB Version entwiceklt wurde, sollte erneut überprüft werden, ob Änderungen vorgenommen wurden, so dass dann ein Weg besteht, das Modul zu Live-Skript abzuändern.
Zudem gibt es eine Applikation, die für Android Geräte heruntergeladen werden kann, welche *VidAnalysis free* heißt (*VidAnalysis*, o. J.), die es ermöglicht, Messungen durchzuführen. Diese kann im CAMMP day so eingesetzt werden, dass der springende Ball videografiert und im Anschluss analysiert wird. Dies hätte den Vorteil, dass die SuS mit eigenen Werten rechnen und auch sehen könnten, wie genau die Bewegung des springenden Balles zustande kommt. Die Applikation ermöglicht es zuerst einmal, ein Video aufzunehmen. Dabei muss darauf geachtet werden, dass die Farbe des verwendeten Balls einen großen Kontrast zu der vom Hintergrund hat, sonst kann der Ball nicht erkannt werden. Zudem muss im Bild ein Gegenstand sein, dessen Größe bekannt ist, um der Applikation einen Maßstab für Abstände zu geben. Im nächsten Schritt - bei der Analyse - muss nämlich der Ball in jedem Frame markiert werden. Im Anschluss daran werden verschiedene Koordinatensysteme erstellt, in denen die Abfolge der gesetzten Punkte dargestellt wird. Eine mögliche Wahl ist das Zeit-y-Koordinatensystem, was gut im CAMMP day verwendet werden könnte. Zudem listet die Applikation die Messwerte in einer Datentabelle auf und gibt hier - unter anderen - den Zeitpunkt und die dazugehörige y-Koordinate an. Würde mit der Applikation gearbeitet, so könnten die SuS in den Aufgaben eigene Werte verwenden, was die Problemstellung spannender macht.
Wird daran gearbeitet, die Applikation zu verwenden, so wäre eine Ansiedlung vor dem ersten Arbeitsblatt denkbar. Dafür sollte jeder Gruppe ein eigener Ball und ein Lineal oder Zollstock zur Verfügung gestellt werden, damit jede Zweiergruppe selbst das Experiment durchführen und einen springende Ball analysieren kann. Soll den SuS die Möglichkeit gegeben werden, die erstellten Daten zu verwenden, so muss der MATLAB-Code dementsprechend angepasst werden.
Eine weitere Verbesserungsmöglichkeit wäre, den Code so zu verändern oder anzupassen, dass flexibel auf Ideen von SuS eingegangen werden kann oder zumindest weitere

Ideen von SuS aufgegriffen werden können. Damit ist gemeint, dass die SuS die Möglichkeit haben sollten, ihre Ideen, die sie im Laufe des Problemstellungsvortrags äußern, umsetzen zu können. Eine Möglichkeit wäre, beispielsweise noch zusätzlich zu den bestehenden Interpolationsarten eine weitere Art aufzunehmen, in welcher sin und cos verwendet werden. Werden die Arbeitsblätter auch überarbeitet, so würde eine Umsetzung dieser Idee den SuS die Möglichkeit geben, selbst zu entscheiden, welche Interpolationsarten sie betrachten wollen. Eine Schwierigkeit bei dieser Vorgehensweise ist die Besprechung der Ergebnisse. Zusätzlich geht verloren, dass die Modellierungsspirale schön gezeigt werden kann und durch jeden Durchlauf durch den Modellierungskreislauf die mathematische Lösung besser wird. Je nachdem mit welcher Interpolationsart die SuS beginnen würden, wäre dieser Effekt nicht mehr vorhanden. Trotzdem sollte die Möglichkeit der Einbindung einer Interpolationsart mit sin und cos, wie Dahmen und Reusken (vgl. Dahmen & Reusken, 2006, S. 301ff) beschreiben, verwendet werden, damit die SuS sehen können, wie eine dadurch erzeugte Animation aussieht.
Eine weitere Verbesserungsmöglichkeit, die bereits im vorherigen Kapitel 5.4.4 erwähnt wurde, ist die, dass schnelle SuS ein Zusatzblatt bekommen sollten. Hierbei kann z. B. im Anschluss an das dritte Arbeitsblatt auf die Physik eingegangen werden. Die Bewegung des springenden Balles kann physikalisch durch die Erdanziehung g begründet werden. So lässt sich die Position $s(t)$ bzw. die zurückgelegte Strecke eines Balles durch die folgende Formel beschrieben:

$$s(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0. \tag{8}$$

Die Anfangsgeschwindigkeit v_0 ist gleich Null und die anfangs zurückgelegte Strecke s_0 beträgt $1,6$ m. Über die Berücksichtigung der Energie- und Impulserhaltung kann schließlich der genaue Verlauf des springenden Balles beschrieben werden. Hierbei muss jedoch beachtet werden, dass nicht nur auf die kinetische und potentielle Energie des Balles geachtet, sondern auch die Verformungsenergie und Reibung berücksichtigt werden müssen. Würden diese vernachlässigt werden, so würde der springende Ball nach jedem Sprung wieder die ursprüngliche Höhe, in der er losgelassen wurde, erreichen.
Um Anhand der ersten beiden Punkt den weiteren Verlauf des springenden Balles zu bestimmen, ist eine Möglichkeit weitere Einschränkungen vorzuschreiben. So kann bspw. angegeben werden, dass ein springender Ball nach dem Aufprallen auf dem Boden ungefähr nur noch 60 % seiner ursprünglichen Energie besitzt und somit auch nur noch bis zu 60 % der ursprünglichen Höhe h_0 gelangt. Nach dem zweiten Aufprallen gilt dies wieder. Die Höhe, die der Ball in den Hochpunkten erreicht, kann in folgender Form aufgeschrieben werden:

$$h(n) = 1 - 0,6^n = 1 - e^{n \cdot \ln(0,6)},$$

wobei $h(n), \quad n \in \mathbb{N}_0$ die Höhe des n-ten Hochpunktes beschreibt. Der restliche Verlauf kann anschließend aufgrund der Erdanziehungskraft durch Gleichung (8) beschrieben werden. Jedoch muss bei jeder Parabel ein anderes v_0 und s_0 verwendet werden.
Wie im mathematischen und theoretischen Hintergrund 3.2.3 gezeigt ist es möglich

die Splineinterpolation als Interpolationsart der Keyframes des springenden Balles zu verwenden. Hierzu könnte ein Zusatzblatt angefertigt werden, welches nach der Behandlung der Polynominterpolation von schnellen SuS bearbeitet werden könnte. Die Behandlung ist an der Stelle sinnvoll, da der Polynomgedanke nur abgeändert wird und Stückweise Polynome zwischen die Keyframes gelegt werden. Wie in Abbildung 10 in Kapitel 3.2.3 gesehen werden kann, stellt die entstandene Animation nicht die Bewegung eines springenden Balles dar. Wird dies umgesetzt in Form eines Zusatzblattes, so kann an dessem Ende die Betrachtung der hermiteschen Interpolation motiviert werden, da die Vorgabe der Ableitungen in den Keyframes dort vorgegeben werden kann und der Graph stark beeinflusst werden kann.
Ein letzter Ausblick wäre eine mögliche Entwicklung einer Abituraufgabe zur TCB-Methode. Hierbei könnte im Rahmen der Analysis eine Funktionsanalyse durchgeführt werden. Wie genau dies umgesetzt wird, müsste noch didaktisch analysiert werden, da drei verschiedene Parameter vorliegen. Möglich wäre beispielsweise zwei der Parameter als Zahlen vorzugeben und die Auswirkungen des dritten zu untersuchen.

7. Abschließende Worte

Nachdem nun die entwickelten Materialien, alle dazugehörigen Überlegungen, die Evaluationen mit Ergebnissen und Verbesserungen für die Zukunft beschrieben wurden, wird nun reflektiert, ob das Ziel der Masterarbeit erreicht wurde:
Ziel der Arbeit war es zum Thema „Wie funktionieren eigentlich Animationsfilme und was hat das mit Mathe zu tun?“ zu entwickeln, welches auf einem Stand ist, so dass es durchführbar ist. Aufgrund der bisherigen Durchführungen und der daraus resultierenden bereits umgesetzten Verbesserungen am Modul, kann behauptet werden, dass dieses Ziel erfolgreich erreicht wurde. Der CAMMP day kann heterogenen Schülergruppen angeboten werden.

Literatur

Aebli, H. (2006). *Zwölf Grundformen des Lehren: eine allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage. Medien und Inhalte didaktische Kommunikation, der Lenzyklus* (Klett-Cotta, Hrsg.).

Barzel, B., Büchter, A. & Leuders, T. (2011). *Mathematik Methodik - Handbuch für die Sekundarstufe I und II* (Cornelsen, Hrsg.).

Barzel, B., Elschenbroich, H.-J., Hefendehl-Hebeker, L., Heintz, G., Heske, H., Hußmann, S., ... Westermann, B. (2011). *Mathematik Didaktik - Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II* (Cornelsen, Hrsg.).

Blum, W., Ferri, R. B., G.Greefrath, Kaiser, B. & Maaß, K. (2013). *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule - Theoretische und didaktische Hintergründe* (S. Spektrum, Hrsg.).

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W. & Niss, M. (2007). *Modeling and applications in mathematics education*. Springer.

Bronstein, I. N., Semendjajew, K., Musiol, G. & Mühlig, H. (2008). *Taschenbuch der Mathematik* (V. H. Deutsch, Hrsg.).

Bruner, J. (1964). The course of cognitive growth. *American Psychologist 19*.

Büchter, A. & Leuders, T. (2011). *Mathematik selbst entwickeln: Lernen fördern - Leistung überprüfen* (Cornelsen, Hrsg.).

CAMMP. (2017). Agenda 2018.

CAMMP-Team. (2017). *CAMMP.* http://blog.rwth-aachen.de/cammp/. (Zuletzt verwendet: 02.08.2017)

Dahmen, W. & Reusken, A. (2006). *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer - Verlag.

Erkunde Animation und noch mehr! (o. J.). https://www.pinterest.de/pin/381680137150101987/. (Zuletzt verwendet: 09.08.2017)

Frank, M. (2017). *Numerische Analysis II.*

Greulich, D., Jörgens, T., Jürgensen-Engl, T., Riemer, W. & Schmitt-Hartmann, R. (2007). *Lambacher Schweizer 7 - Mathematik für Gymnasien Nordrhein-Westfalen* (Klett, Hrsg.).

Hinrichs, G. (2008). *Modellierung im Mathematikunterricht*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Jackèl, D., Neunreither, S. & Wagner, F. (2006). *Methoden der Computeranimation.* Springer.

Kochanek, D. H. U. & Bartels, R. H. (1984). *Interpolating splines with local tension, continuity and bias control.*

Krieg, A. (2007). *Analysis I.*

Landesmedienzentrum Baden-Württemberg. (o. J.). *Animationsfilm: Geschichte und Techniken.* https://www.lmz-bw.de/animationsfilm.html. (Zuletzt verwendet: 02.08.2017)

Maaß, K. (2007). *Mathematisches Modellieren - Aufgaben für die Sekundarstufe I* (C. Scriptor, Hrsg.).

Maaß, K. (2012). Mathematisches Modellieren im Unterricht..

Maiwald, A. (2014). *Wie die maus (zeichentrick) gemacht wird - sachgeshcichten mit armin maiwald.* https://www.youtube.com/watch?v=IRsKzCiQBGU.

The Maths Process Poster - Applying the CBM Solution Helix of Maths. (2017). https://www.computerbasedmath.org/maths-process-poster/. (Zuletzt verwendet: 11.08.2017)

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen. (2007). *Kernlehrplan für das Gymnasium - Sekundarstufe I (G8) in Nordrhein-Westfalen - Mathematik.* Frechen: Ritterbach Verlag.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen. (2013). *Kernlehrplan für das Gymnasium - Sekundarstufe II Gymnasium / Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen - Mathematik.* Zugriff auf `http://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/klp_SII/m/KLP_GOSt_Mathematik.pdf`

Noack, K. (o. J.). *Mathe-Zitate und Sprüche.* https://www.matheretter.de/mathe-zitate. (Zuletzt verwendet: 04.08.2017)

Ortlieb, C. P. (o. J.). Heinrich Hertz und das Konzept des mathematischen Modells.

Parent, R. (2012). *Computer Animation - Algorithms and Techniques 3* (M. Kaufmann, Hrsg.).

Peters, A. (2016). *Interpolation als Kernidee inner- und außermathematischer Anwendung* (Unveröffentlichte Dissertation). RWTH Aachen.

Siller, H.-S., Greefrath, G. & Ludwig, M. (2017). Prüfungsaufgaben mit Anwendung / Modellierungen..

Stephan, M. (2004). *4. Seminarvortrag - Kubiche Splines* (Unveröffentlichte Diplomarbeit).

Stoer, J. (2000). *Numerische Mathematik 1.* Springer - Verlag.

Vidanalysis. (o. J.). http://vidanalysis.com/. (Zuletzt verwendet: 02.08.2017)

Vorhölter, K. (2009). *Sinn im Mathematikunterricht - Zur Rolle von mathematischen Modellierungsaufgaben bei der Sinnkonstruktion von Schüerinnen und Schülern* (B. Budrich, Hrsg.).

Anhang

A. Methodisches Konzept

CAMMP day

Animationsfilme

Methodisches Konzept

für die Dozenten

Material

- ☐ Arbeitsblatt1.pdf
- ☐ Arbeitsblatt2.pdf
- ☐ Arbeitsblatt3.pdf
- ☐ Arbeitsblatt4.pdf
- ☐ Arbeitsblatt4_Zusatz.pdf
- ☐ Evaluationsbogen.pdf
- ☐ ZDI-Unterschriftenliste
- ☐ Hilfekarten Arbeitsblatt1.pdf
- ☐ Hilfekarte 1 Loesung.pdf
- ☐ Hilfekarten Arbeitsblatt2.pdf
- ☐ Hilfekarte 7 Loesung.pdf
- ☐ Hilfekarten Arbeitsblatt3.pdf
- ☐ Variablen.pdf
- ☐ Synfig Anleitung.pdf

Präsentationen:

- ☐ OpeningPresentation.pdf
- ☐ Modellierungsvortrag.pdf - Doktorand
- ☐ Problemstellung.pdf
- ☐ Berufs-Studieninformation presentation.pdf
- ☐ Zwischenpraesentation1.pdf
- ☐ Zwischenpraesentation2.pdf
- ☐ Zwischenpraesentation3.pdf
- ☐ Abschlussdiskussion.pdf
- ☐ closing presentation.pdf

OHP-Folien:

- ☐ Besprechungsfolie.pdf
- ☐ 3 leere Folien

Gegenstände:

- ☐ Ball
- ☐ Daumenkino

Laptopvorbereitung:

- Schülercode MATLAB Animationsfilme
- Synfig installieren
- Synfig Ordner ohne *.sifz* ohne _SuS (das heißt die Dateien mit _SuS bleiben) auf den Desktop tun

1/3

Ablauf

8:15		☐	Beginn der Vorbereitungen: Laptops in den Raum bringen Wlan aktivieren, Material in den Raum bringen, und Beamer anschließen
		☐	*Animationsfilme.m* öffnen und beim ersten Section zum Durchlaufen lassen auf Run-Section drücken
		☐	`Variablen.pdf` an jeden Platz legen
		☐	Hilfekarten und deren Lösungen Vorne auslegen
9:00	Einführung	☐	`ZDI-Unterschriftenliste` ausfüllen lassen und Unterschriften der Eltern einammeln
		☐	`Vortrag_OpeningPresentation.pdf` halten
		☐	`Modellierungsvortrag.pdf` von Doktoranden halten lassen
		☐	`Vortrag_Problemstellung.pdf` halten
		☐	MATLAB kurz vorstellen
		☐	Synfig kurz vorstellen
9:40	Partnerarbeit (Teil I)	☐	AB `Arbeitsblatt1.pdf` austeilen
10:10		☐	Schülervorträge zur Besprechung des AB 1 mit OHP-Folie
		☐	*Zwischenpraesentation1.pdf* halten für Interpretation
		☐	gerade_Straße (interaktiv) besprechen
10:20	Pause		
10:30	Partnerarbeit (Teil II)	☐	AB `Arbeitsblatt2.pdf` austeilen
11:25	Partnerarbeit (Teil III)	☐	AB `Arbeitsblatt3.pdf` austeilen, wenn benötigt
11:35		☐	Schülervorträge zur Besprechung des AB 2 mit OHP-Folie
		☐	*Zwischenpraesentation2.pdf* halten für Interpretation
11:45	Berufsorientierung	☐	`Berufs-Studieninformation presentation.pdf` halten oder halten lassen
12:00	Mittagspause		
13:00		☐	Fortsetzung der Partnerarbeit
13:30		☐	Schülervorträge zur Besprechung des AB 3 mit OHP-Folie
		☐	*Zwischenpraesentation3.pdf* halten für Interpretation
13:40	Partnerarbeit (Teil IV)	☐	AB `Arbeitsblatt4.pdf` austeilen
Bei Bedarf		☐	Evtl. `Synfig Anleitung` austeilen
Bei Bedarf		☐	Evtl. `Arbeitsblatt1_Zusatz.pdf` an fortgeschrittene Gruppen austeilen
14:30		☐	Schülervorträge zur Besprechung des AB 4
		☐	kurvige_Straße und Autobahnkreuz (interaktiv) besprechen
14:35	Diskussion	☐	`Abschlussdiskussion.pdf` durchführen
		☐	`closing presentation.pdf` halten
14:50	Evaluation	☐	`Evaluationsbogen.pdf`

2/3

Notizen zur MATLAB-Vorstellung:
Anhand der Datei *Animationsfilme.m* können einige Aspekte von MATLAB erklärt werden. Dabei soll auf folgendes eingegangen werden:

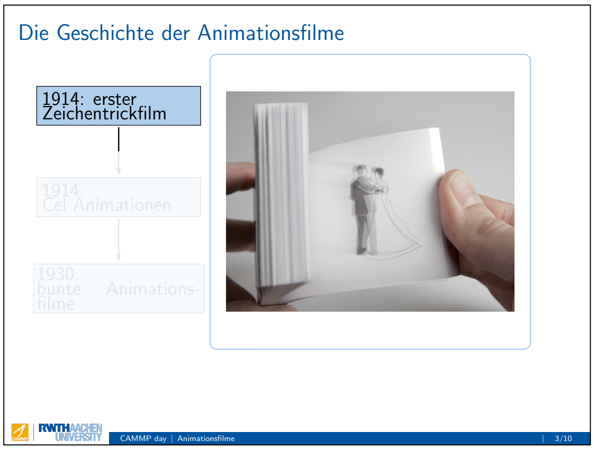
- MATLAB ist ein großer Taschenrechner
- Hauptsächliche Beschäftigung im Editor-Fenster.
- Es handelt sich um eine Art Lückentext. SuS müssen mit überlegten Formeln die NaNs ersetzten.
- Formeln und Aufgabenteile werden durch das Klicken auf „Run-Section“ überprüft.
- Dies sollte einmal anhand einer falschen Formel für die erste Aufgabe durchgeführt werden. Eine mögliche Formel, die verwendet werden kann ist:
  *hp = @(i, k, tp) 2*t(i)*
- Bei Funktionen, wie bspw. *hp = @(i, k, tp)*, stehen in der Klammer die Parameter, welche innerhalb der Funktion genutzt werden sollten.

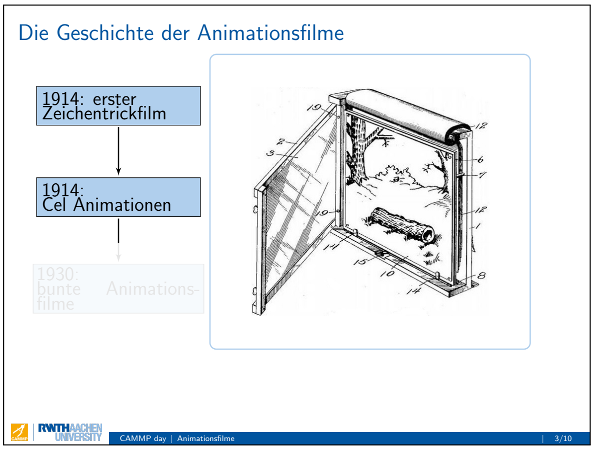
Notizen zur Synfig-Vorstellung:
Hier wird erst einmal nur auf das Gröbste eingegangen, um den Schülerinnen und Schülern den Einstieg in Synfig später zu erleichtern. Die einzelnen Schritte sollen anhand eines kleinen Beispiels (zwei Kreisen) durchgeführt werden:

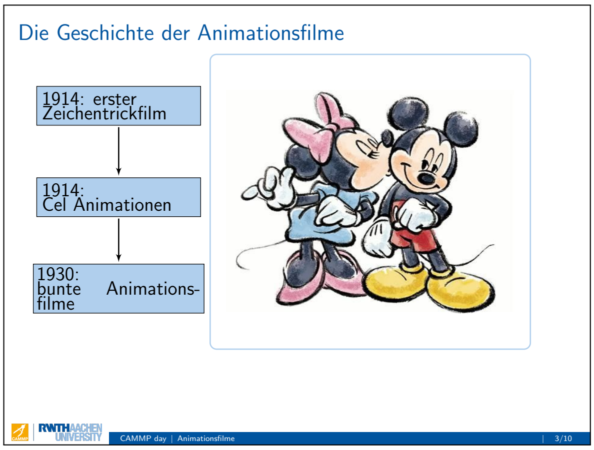
- Synfig wird für die Erstellung von Animationen verwendet.
- Im großen, mittleren Fenster werden die Animationen erstellt und Gegenstände hin- und hergeschoben. (Erstelle zwei Kreise)
- Beinhaltet die Animation bereits mehrere Gegenstände kann unten rechts der Gegenstand ausgewählt werden, der verschoben oder verändert werden soll. (Wähle einen der Kreise aus und verschiebe ihn.)
- Zum erstellen der Animation muss der Animationsmodus aktiviert werden, indem auf das grüne Männchen geklickt wird.
- Die verwendete Interpolationsart kann ausgesucht werden. (Verwende linear)
- Keyframes werden über das Plus-Zeichen gespeichert nachdem der Gegenstand zum gewünschten Ort verschoben wurde und der gewünschte Zeitpunkt in der Zeitleiste angeklickt wurde. (Erstelle zwei Keyframes und spiele die Animation ab.)

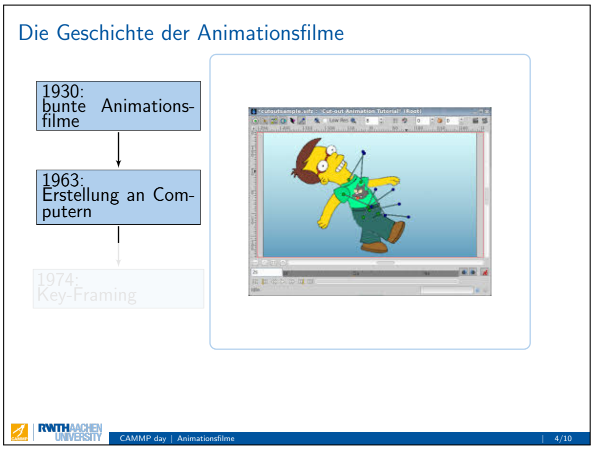
B. Einführungsvortrag

B.1. Folien des Einführungsvortrags









Die Geschichte der Animationsfilme

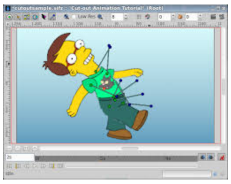
1930: bunte Animationsfilme

↓

1963: Erstellung an Computern

↓

1974: Key-Framing



Die Geschichte der Animationsfilme

1930: bunte Animationsfilme

↓

1963: Erstellung an Computern

↓

1974: Key-Framing

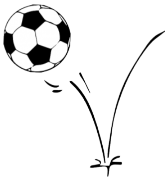
Modellierungskreislauf

Reales Problem (Animation eines springenden Balles) — vereinfachen → **Vereinfachtes Problem**

Vereinfachtes Problem — mathematisch beschreiben → **Mathematisches Modell**

Mathematisches Modell — berechnen → **Mathematische Lösung**

Mathematische Lösung — interpretieren → **Reales Problem**



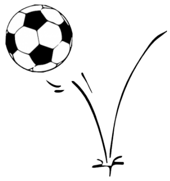
Modellierungskreislauf

Reales Problem (Verbindung der Keyframes) — vereinfachen → **Vereinfachtes Problem**

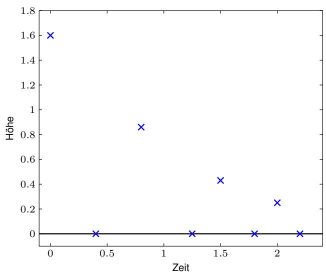
Vereinfachtes Problem — mathematisch beschreiben → **Mathematisches Modell**

Mathematisches Modell — berechnen → **Mathematische Lösung**

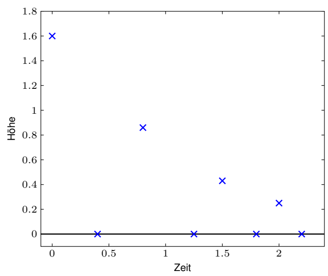
Mathematische Lösung — interpretieren → **Reales Problem**



Wie können die Keyframes sinnvoll miteinander verbunden werden?



Wie können die Keyframes sinnvoll miteinander verbunden werden?



WICHTIG: Zeit-Höhe Diagramm

Modellierungskreislauf

Reales Problem (Verbindung der Keyframes) — vereinfachen → **Vereinfachtes Problem** (Interpolation)

Vereinfachtes Problem — mathematisch beschreiben → **Mathematisches Modell**

Mathematisches Modell — berechnen → **Mathematische Lösung**

Mathematische Lösung — interpretieren → **Reales Problem**

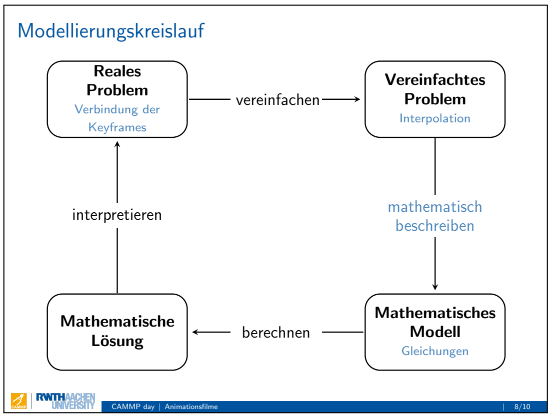
Modellierungskreislauf

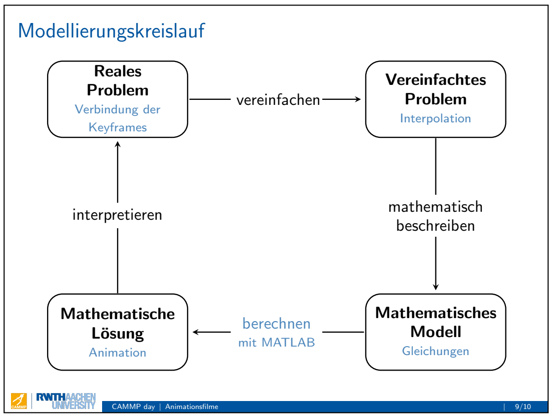
Reales Problem (Verbindung der Keyframes) — vereinfachen → **Vereinfachtes Problem** (Interpolation)

Vereinfachtes Problem — mathematisch beschreiben → **Mathematisches Modell**

Mathematisches Modell — berechnen → **Mathematische Lösung**

Mathematische Lösung — interpretieren → **Reales Problem**


Modellierungskreislauf
Reales Problem
Verbindung der Keyframes
vereinfachen
Vereinfachtes Problem
Interpolation
mathematisch beschreiben
Mathematisches Modell
Gleichungen
berechnen
Mathematische Lösung
interpretieren
CAMMP day | Animationsfilme
8/10


Modellierungskreislauf
Reales Problem
Verbindung der Keyframes
vereinfachen
Vereinfachtes Problem
Interpolation
mathematisch beschreiben
Mathematisches Modell
Gleichungen
berechnen
mit MATLAB
Mathematische Lösung
Animation
interpretieren
CAMMP day | Animationsfilme
9/10


Wie findest du Antworten auf all diese Fragen?
DON'T PANIC!
ORGANIZE.
• Bearbeite die Arbeitsblätter!
• Nutze MATLAB!
• Arbeite im Team mit deinem Partner!
• Nutze die Hilfekarten!
• Frag' die Betreuer!
• Nutze das Internet!
• Präsentiere Ergebnisse deinen Mitschülern!
• Hilf deinen Mitschülern!
CAMMP day | Animationsfilme
10/10

B.2. Notizen zum Einführungsvortrag

CAMMP day
Animationsfilme

Hinweise zum Eröffnungsvortrag

Folie 1 | Eröffnungsfolie

Nach dem einführenden Vortrag in die Welt der mathematischen Modellierung können wir nun auch schon mit dem Workshop zum Thema Animationsfilme beginnen.

Folie 2 | Wie entstehen Animationsfilme?

Video (0:10 - 6:46) zeigen und einmal von den Schüler*innen zusammenfassen lassen, was erzählt wurde.
Es werden einzelne Bilder gemalt, die nacheinander gezeigt werden. Damit nicht jedes Mal das komplette Bild, sondern nur die sich bewegenden Objekte gemalt werden müssen, wird der Hintergrund getrennt vom Objekt gemalt.

Folie 3+4 | Die Geschichte der Animationsfilme

1914: erster Zeichentrickfilm
In 1914 wurde der erste Zeichentrickfilm „Gertie the trained dinosaur“ angefertigt. Er bestand aus 10.000 gezeichneten Bildern, welches einer Länge von ungefähr $6,5$ min entspricht, da pro Sekunde 25 Bilder benötigt werden, damit das menschliche Auge eine Bilderabfolge als flüssige Bewegung wahrnimmt. Man kann sich die ersten Zeichentrickfilme ähnlich zu Daumenkinos vorstellen, welche ebenfalls nur eine Abfolge von vielen Bildern darstellen.
1914: Cel Animation
Im gleichen Jahr entwickelte Earl Hurd eine Methode, um das Zeichnen der vielen Bildern zu erleichtern. Dabei teilte er die Bilder auf in Vorder- und Hintergrund. So musste nur noch die sich verändernde Figur im Vordergrund immer wieder neu gemalt werden, der Hintergrund jedoch blieb gleich und musste nur ein einziges Mal angefertigt werden. Wie im Video von der Maus zu sehen war, wurde der Vordergrund einfach auf eine Folie gemalt.
In der Abbildung sieht man eine solche Apparatur, die früher für das Anfertigen solcher Bilder verwendet wurde. Der Hintergrund befindet sich in einem Kasten auf welchen eine Glasscheibe gelegt werden kann, worauf die Figur gemalt wird.
1930: bunte Animationen
In 1916 wurde das erste Mal ein Charakter mit einer Persönlichkeit animiert, so dass auch Gesichtsausdrücke und somit kleinere Details wichtiger wurden.
Im Jahr 1930 wurde dann der erste bunte Animationsfilme „Mickey Mouse“ gedreht.
1963: Erstellung an Computern
1963 wurde der Prozess zur Erstellung eines Animationsfilms vereinfacht, indem die ersten Animationen am Computer erstellt wurden. Dafür mussten dann keine Zeichnungen angefertigt werden, sondern alle Charaktere und Hintergründe mussten am Computer angefertigt werden. Das hatte jedoch den Vorteil, dass einzelne Bewegungen durch das Verschieben einzelner Bestandteile der Charaktere möglich waren und die Charaktere nicht jedes Mal von neu gemalt werden müssen. Trotzdem mussten auch hier weiterhin alle einzelnen Bilder und Bewegungsschritte angefertigt werden.
1974: Key-Framing
Das änderte sich im Jahr 1974 als das Key-Framing entwickelt wurde. Dadurch wird die Anzahl der benötigten Bilder drastisch reduziert, da nur noch die „Keyframes“ (Hauptbilder) benötigt werden. Es werden die Bilder angefertigt, welche für die gewünschten Bewegungen zentral sind, also bei denen ausschlaggebende Richtungsänderungen oder ähnliches zu sehen sind. Den Rest übernimmt im Anschluss der Computer, indem er die Bilder interpoliert, also sinnvolle Bewegungen einzelner Punkte vom ersten zum zweiten Keyframe erstellt.

1/3

Was genau hinter Interpolation steckt und wie die funktioniert, werden wir uns heute genauer anschauen.

Folie 5 | Modellierungskreislauf

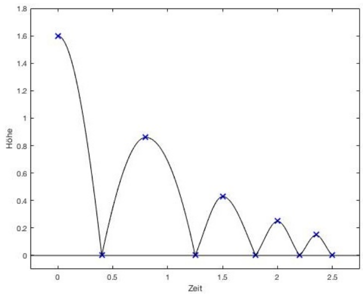


Bild 1: Verlauf eines springenden Balles

Ziel des heutigen Tages ist es einen springenden Ball zu animieren. So ist das reale Problem die Animation eines springenden Balles.

Experiment durchführen:

Lasse den Ball für alle Schüler*innen sichtbar ungefähr auf Schulterhöhe los und lasse ihn titschen, bis er ruht. Lasse ihn auf dem Pult titschen, damit er für die Schüler*innen sichtbar ist.

Überlege mit den Schüler*innen zusammen, welche Punkte hier ausschlaggebend für die Bewegung sind bzw. welche Punkte der Bewegung als Keyframes verwendet werden können.

Diskutiere im nächsten Schritt darüber, wie diese in einem Diagramm veranschaulicht werden könnten. Hier sollen sie darauf kommen, dass es sinnvoll ist die x-Achse mit der Zeit zu belegen. Wiederhole öfters, dass es sich um ein **Zeit-Höhen Diagramm** handelt. Führe das Experiment drei Mal durch, damit bereits vorhandene Ideen überprüft bzw. bestätigt werden können und alle Schüler*innen das Experiment mindestens einmal gesehen haben.

Die Hoch- und Tiefpunkte, nämlich die Punkte, die die Bewegung des springenden Balles vorgeben, werden Keyframes genannt. Kennzeichne diese im erstellten Koordinatensystem einmal mit Kreuzen.

Das gewünschte Ergebnis ist auf der nächsten Folie zu sehen.

<u>WICHTIG:</u> Den Schüler*innen muss klar werden, dass sich die Zeit und nicht die x-Komponente auf der x-Achse befindet. Außerdem soll hier explizit die tatsächliche Bewegung des Balles noch nicht thematisiert werden, nur die Keyframes.

Folie 6 | Modellierungskreislauf

Im Modellierungsvortrag haben wir eben gehört, dass es meist sinnvoll oder notwendig ist die reale Situation erstmal zu vereinfachen.

Bei der Erarbeitung eines mathematischen Modells für die Erstellung einer Animation eines springenden Balles starten benötigen wir die gerade eben erarbeiteten Keyframes. Diese sollen verbunden werden. Das vereinfachte Problem ist somit eine Verbindungsart bzw. Funktion mit der die Keyframes verbunden werden.

Gehe hier erneut auf das Zeit-Höhe Diagramm ein, falls es vorher nicht getan wurde.

Folie 7 | Wie können die Keyframes sinnvoll miteinander verbunden werden?

Wir erinnern uns an den Modellierungskreislauf und wollen nur vereinfachte Situationen mathematisieren. Wie könnte der Graph eines vereinfachten Modells aussehen und wie werden die Punkte darin miteinander verbunden?

Hier sollen Ideen von den Schüler*innen gesammelt werden. Kommen keine Ideen, so können kleine Hilfestellungen gegeben werden, welche Arten von Funktionen sie kennen. Werden zu viele Ideen präsentiert, so muss erwähnt werden, dass nur eine Auswahl dieser Möglichkeiten heute betrachtet werden.

Folie 8 | Modellierungskreislauf

Diesen Graph wollen wir nun mathematisch beschreiben und das tun wir durch das Aufstellen von Gleichungen oder Gleichungssystemen, die die entsprechenden Interpolationsarten beschreiben.

Folie 9 | Modellierungskreislauf

MATLAB berechnet aus der eingegeben Interpolation die Animation und erstellt eine gif-Datei, so

C. Aktuelle Version der Arbeitsblätter mit Zusatzmaterial

C.1. Arbeitsblatt 1

CAMMP day

Animationsfilme

CAMMP | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Animation eines springenden Balles

Ein erstes Modell

- Arbeitsblatt 1 -

Animationsfilme sind Filme, die aus so vielen schnell aufeinander folgenden gezeichneten, von Computern berechneten oder fotografierten Einzelbildern bestehen, dass das menschliche Auge die Abfolge als flüssige Bewegung wahrnimmt. Ein riesiger Durchbruch für die Animationsfilme war, dass nicht mehr jedes einzelne Bild, sondern nur noch ausschlaggebende Bilder, „Keyframes" genannt, gezeichnet wurden. Die Bewegung zwischen diesen Bildern wird interpoliert, also durch eine Funktion angenähert. So müssen nur noch sehr viel weniger Bilder gezeichnet werden.

Bild 1: Charaktere aus Animationsfilmen

Problembeschreibung | Springender Ball

Im Laufe des CAMMP days wirst du einen springenden Ball animieren. Die ausgewählten Keyframes stellen dabei die für die Bewegung charakteristische Punkte dar (siehe Bild 2). Dabei ist die Zeit in Sekunden auf der x-Achse und die Höhe in Metern auf der y-Achse aufgetragen.
Nummeriere die einzelnen Punkte durch.

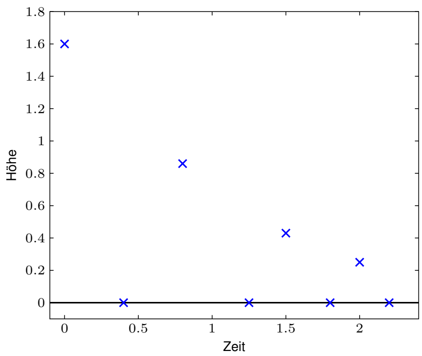


Bild 2: Keyframes eines springenden Balles

Öffne das MATLAB-Skript *Animationsfilme.m*. In Zeilen 2 und 4 sind die Zeitpunkte t und Höhen h der Keyframes als Vektoren gespeichert. Bearbeite nun die folgenden Aufgaben:

Aufgabe 1 | Lineare Interpolation

Liegen einzelne Punkte vor, die interpoliert werden sollen, so ist der erste naheliegende Schritt, diese durch gerade Strecken miteinander zu verbinden. Dafür betrachten wir von den acht gegebenen Punkten zwei benachbarte und nennen diese $P_i(t_i|h_i)$ und $P_{i+1}(t_{i+1}|h_{i+1}), i = 1, \dots 7$.

a) Stelle die Geradengleichung auf, die durch diese beiden Punkte definiert ist.
Hinweis: Zu dieser Aufgabe liegen vier Hilfekarten 1, 2, 3 und 4 aus, die du bei Bedarf nutzen kannst.

Da du diesen Schritt unabhängig von Werten gemacht hast, gilt deine erstellte Gleichung für jedes benachbarte Punktepaar. Dabei wird deine erstellte Gleichung für alle Werte, die zwischen benachbarte Punkten $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ liegen, ausgewertet.

b) Gib deine Gleichung in Zeile 7 anstelle von NaN in MATLAB ein und lasse deine Gleichung überprüfen, indem du auf den Button Run Section klickst.
Hinweis: Verwende die Schreibweisen vom ausgeteilten Variablen-Zettel. Da wird t als $tp(k)$ geschrieben, wobei k eine Variable ist, die MATLAB zum Rechnen benötigt.

Du erkennst, ob deine Lösung richtig ist, wenn die erstellte Animation durch die gekennzeichneten Keyframe-Punkte (Kreuze in MATLAB) verläuft.

1/2

Aufgabe 2 | Interpretation der linearen Interpolation

a) Beurteile die Qualität der Animation durch lineare Interpolation in Bezug auf die realitätsgetreue Darstellung der Bewegung eines springenden Balles. Betrachte dazu erneut das von MATLAB erstellte animierte Bild, indem du noch einmal auf den Button Run Section drückst.

b) Nenne einige Verbesserungsmöglichkeiten in Bezug auf die Bewegung eines springenden Balles.

c) Gib mindestens eine Situation bzw. Bewegung an, die anhand der linearen Interpolation gut interpoliert werden könnte.

Aufgabe 3 | Gerade Straße

In dieser Aufgabe wirst du mit Synfig arbeiten und selbst eine Animation erstellen. Synfig ist ein Programm, das benutzt werden kann, um Animationen zu erstellen, welche verschiedene Interpolationsweisen benötigen. Ziel ist es, das Auto die gerade Straße entlang fahren zu lassen.

- Öffne zunächst *Synfig*. Geh oben links auf *Datei* → *Öffnen* → *Schreibtisch* → *Synfig* → *gerade_Strasse* → *Synfig_gerade_Strasse_SuS*.
- Die Animation die du erstellen wirst, wird 50 Bilder lang sein, wobei 24 Bilder pro Sekunde gezeigt werden. Das bedeutet, dass sie fast 2 Sekunden dauern wird.
- Klicke zum Festlegen der **Interpolationsmethode** am unteren Rand des großen mittleren Feldes auf Fließend und wähle Linear aus.
- Klicke auf das grüne Männchen, welches den **Animationsmodus aktiviert**. Durch das Anklicken sollte es rot werden und zusätzlich ein roter Rahmen um das mittlere Fenster erscheinen.

Da wir die lineare Interpolation ausgewählt haben, sind lediglich ein Keyframe am Anfang und einer am Ende der Animation notwendig, also am Start- und Endpunkt.

- Wähle zum Erstellen der **Keyframes** unten rechts im Ebenen-Menü die Ebene „Ford-Mustang" aus, damit du das Auto bewegen kannst.
- Den **Zeitpunkt** kannst du entweder unten im mittleren Feld bei der Zeitleiste durch ein Klicken in die dunkel graue Leiste festlegen. Bei dem Zeitpunkt erscheint anschließend ein orangefarbener Strich. Klicke nun unten links in dem Fenster auf den Reiter *Schlüsselbilder*. Dort werden die **Keyframes** aufgelistet, die du bereits erstellt hast. Durch einen Klick auf das unten links, kannst du weitere Schlüsselbilder hinzufügen, nachdem du im Hauptfenster in der Mitte die neue Position deines Autos eingestellt hast.
- Ist deine Animation fertiggestellt, kannst du sie dir anschauen, indem du auf den -Button und anschließend auf den -Button klickst. Zum Beenden des Animationsmodus musst du auf das rote Männchen klicken, welches dann wieder wie anfänglich grün wird.
- Um die Animation so zu **speichern**, dass sie außerhalb von Synfig angeschaut werden kann, muss sie erst gerendert werden, was so viel heißt wie berechnen bzw. ausgeben. Klicke hierfür erneut auf das Quadrat bei den Linealen und danach auf *Datei*. Dort musst du auf *Rendern* klicken und den Ordner aussuchen in dem die Animation gespeichert werden soll, indem du auf *wählen* klickst. Wähle am besten einfach den *Schreibtisch*. In der zweiten Zeile musst du *gif* auswählen.

Melde dich und frage nach Arbeitsblatt 2, wenn du mit diesem Blatt fertig bist!

C.2. Zusatzmaterial von Arbeitsblatt 1

C.2.1. Hilfekarten

CAMMP day

Animationsfilme

Hilfekarten

Aufgabe 2 | Hilfekarte 1

Stelle die Geradengleichung, die durch die zwei Punkte $P_1(1|4)$ und $P_2(3|0)$ definiert wird, auf.
Du kannst dein Ergebnis mit der Vorne ausliegenden Musterlösung vergleichen.

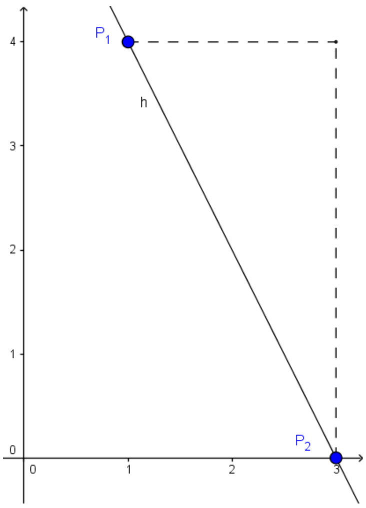
Aufgabe 2 | Hilfekarte 2

Die Gleichung einer Geraden lautet:
$h(t) = m \cdot t + b$.

Aufgabe 2 | Hilfekarte 3

Zur Berechnung der Steigung einer Geraden musst du das Steigungsdreieck an den Punkten $P_1(t_1|h_1)$ und $P_2(t_2|h_2)$ verwenden. Bestimme die Steigung der Gerade g aus dem unten dargestellten Koordinatensystem, indem du folgende Formel verwendest:

$m = \frac{h_2 - h_1}{t_2 - t_1}$.



Aufgabe 2 | Hilfekarte 4

Setze, für die Berechnung von b, in deine schon existierende Gleichung einen der Punkte P_1 oder P_2 ein und löse die Gleichung nach b auf.

C.2.2. Lösung von Hilfekarte 1

CAMMP day

Animationsfilme

Lösung Hilfekarte 1

Die Geradengleichung für das lineare Verbindungsstück zwischen zwei Punkten ist gegeben durch:

$$h(t) = m \cdot t + b$$

Die Steigung der Geraden zwischen $P_1(1|4)$ und $P_2(3|0)$ wird folgendermaßen bestimmt:

$$m = \frac{h_2 - h_1}{t_2 - t_1} = \frac{0-4}{3-1} = -2$$

Durch das Einsetzen von Punkt P_2 in die Geradengleichung erhält, man den y-Achsenabschnitt b:

$$0 = -2 \cdot 3 + b \qquad \Leftrightarrow \qquad b = 6$$

$$\Rightarrow h(t) = -2 \cdot t + 6$$

1/1

C.2.3. Tabelle mit Variablen

CAMMP day

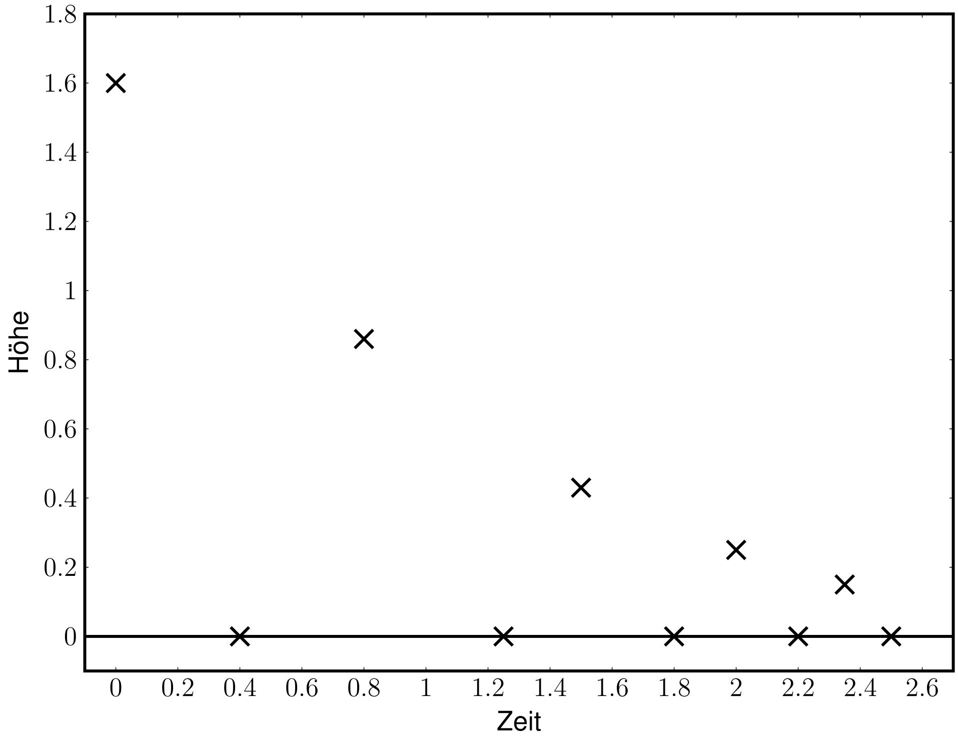
Animationsfilme

Variablen

Variable	Schreibweise in MATLAB	Bedeutung
$\cdot$	$*$	Multiplizieren
t^n	t ^ Leerzeichen n	Exponenten
$:$	$/$	Teilen
t_i	$t(i)$	Der Zeitpunkt vom i-ten Keyframe
t_{i+1}	$t(i+1)$	Der Zeitpunkt vom $(i+1)$-ten Keyframe
$f(t_i) = h_i$	$h(i)$	Die Höhe vom i-ten Keyframe
$f(t_{i+1}) = h_{i+1}$	$h(i+1)$	Die Höhe vom $(i+1)$-ten Keyframe
t	$tp(k)$	Das durchlaufende t deiner Gleichung $f(t)$. Dabei ist k eine Variable, die MATLAB zum Rechnen benötigt.
$f'(t_i)$	$df(i)$	Die Ableitung der Funktion $f(t)$ am i-ten Keyframe.
$f'(t_{i+1})$	$df(i+1)$	Die Ableitung der Funktion $f(t)$ am $(i+1)$-ten Keyframe.

1/1

C.2.4. Besprechungsfolie



C.3. Musterlösung von Arbeitsblatt 1

CAMMP day

Animationsfilme

Musterlösung vom ersten Arbeitsblatt

Aufgabe 1 | Lineare Interpolation

a) Die Steigung der Geraden lässt sich allgemein genauso berechnen, wie die Schüler*innen aus Zahlenbeispielen kennen:

$$m_i = \frac{h_{i+1} - h_i}{t_{i+1} - t_i}$$

Durch das Einsetzen von Punkt P_i in die Geradengleichung erhält, man den y-Achsenabschnitt n_i:

$$h_i = \frac{h_{i+1} - h_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot t_i + n_i \qquad \Leftrightarrow \qquad n_i = h_i - \frac{h_{i+1} - h_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot t_i$$

Die Geradengleichung für das lineare Verbindungsstück zwischen zwei Punkten ist somit gegeben durch:

$$\begin{aligned} hp_{linear}(k) &= \frac{h_{i+1} - h_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot tp(k) + h_i - \frac{h_{i+1} - h_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot t_i \\ &= \frac{(h_{i+1} - h_i) \cdot tp(k) + h_i \cdot (t_{i+1} - t_i) - (h_{i+1} - h_i) \cdot t_i}{t_{i+1} - t_i} \\ &= \frac{h_{i+1} \cdot tp(k) - h_i \cdot tp(k) + h_i \cdot (t_{i+1}) - \cancel{h_i \cdot t_i} - h_{i+1} \cdot t_i + \cancel{h_i \cdot t_i}}{t_{i+1} - t_i} \\ &= h_{i+1} \cdot \frac{tp(k) - t_i}{t_{i+1} - t_i} + h_i \cdot \frac{t_{i+1} - tp(k)}{t_{i+1} - t_i} \end{aligned}$$

Der Graph zur erstellten Animation von MATLAB nachdem diese Gleichung eingegeben wurde, ist auf der erste Seite in Abbildung 1 zu sehen.

Lasse den Schüler*innen immer genügend Zeit, um die Lösung von der Folie abzuschreiben, falls sie es selbst nicht geschafft haben und sie die Animation aber noch sehen und den Code vervollständigen wollen.

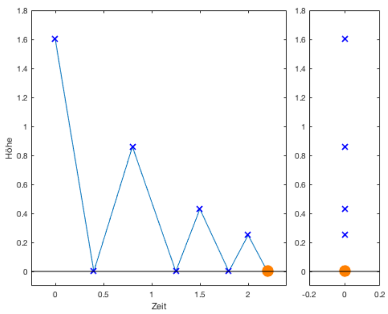


Abbildung 1: Graph zur linearen Interpolation

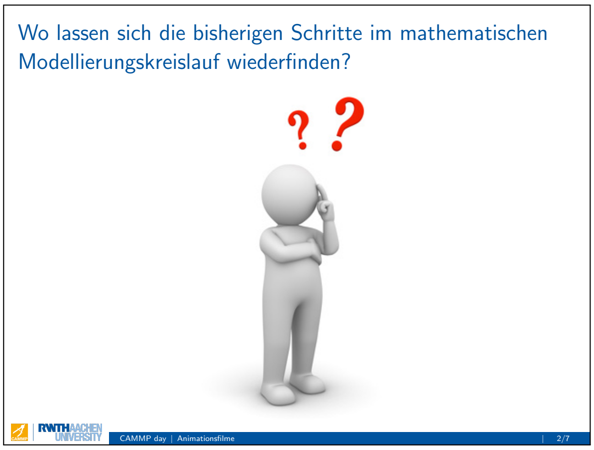
Aufgabe 3 | Interpretation der linearen Interpolation

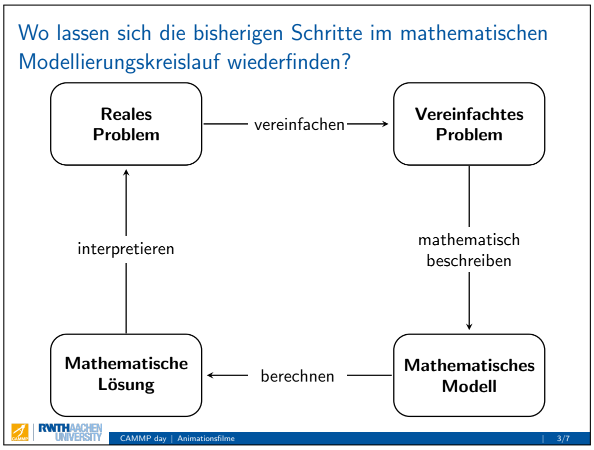
a) Die Beschleunigung an den Extrema ist bspw. falsch. Der Ball bleibt eine gewisse Zeit am Boden, während er sich verformt und die Beschleunigung sich umdreht. Richtung Hochpunkt wird er langsamer, was ebenfalls nicht zu sehen ist.

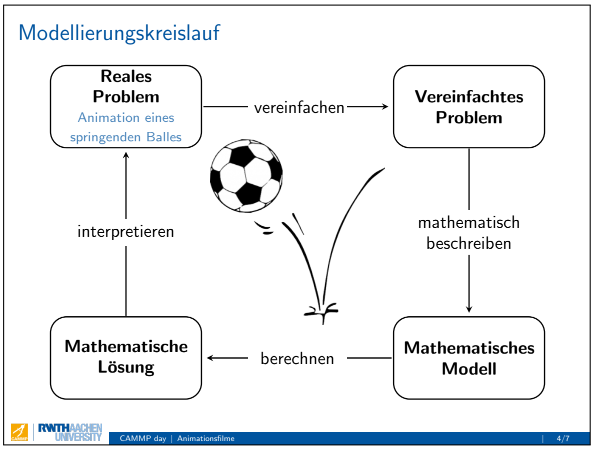
b)
- Abrundungen an den Hochpunkten
- spitzeren Graphen an den Tiefpunkten
- Verformung des Balles am Boden

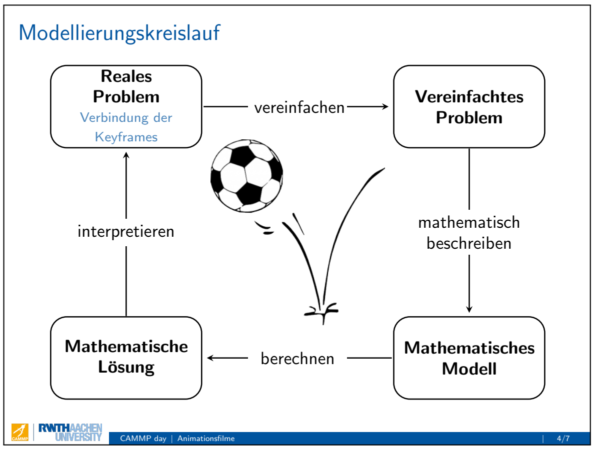
c)
- Auto mit gleich bleibender Geschwindigkeit

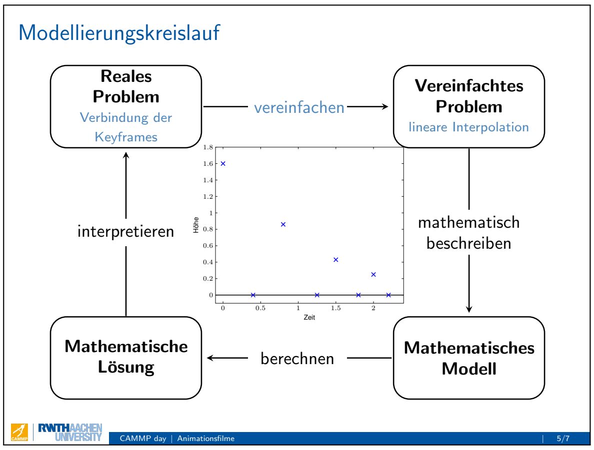
C.4. Erster Zwischenvortrag

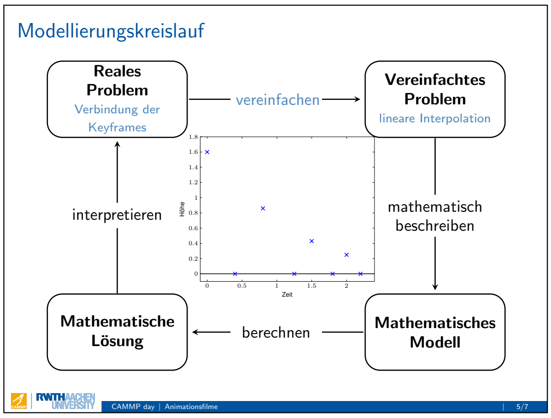


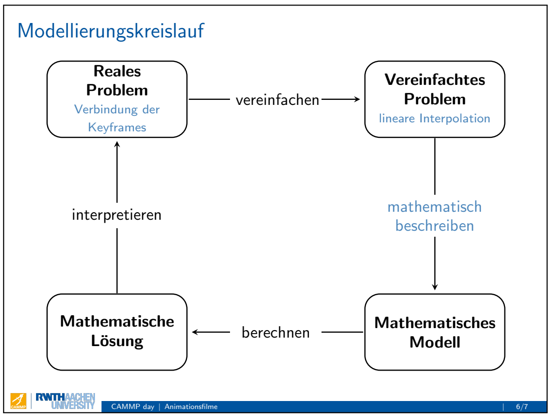


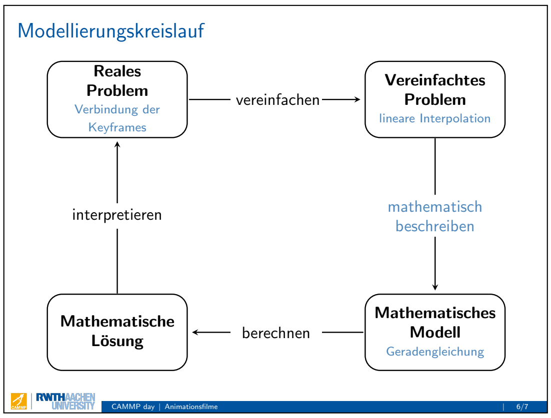


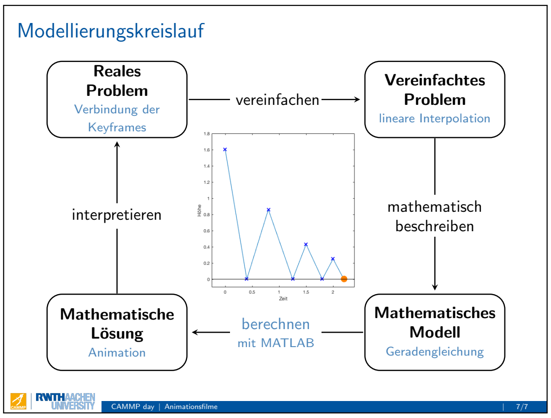


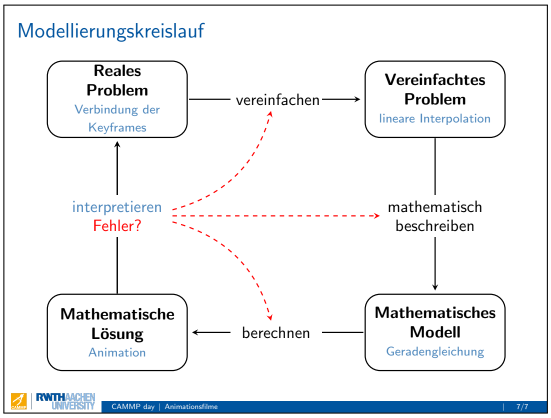


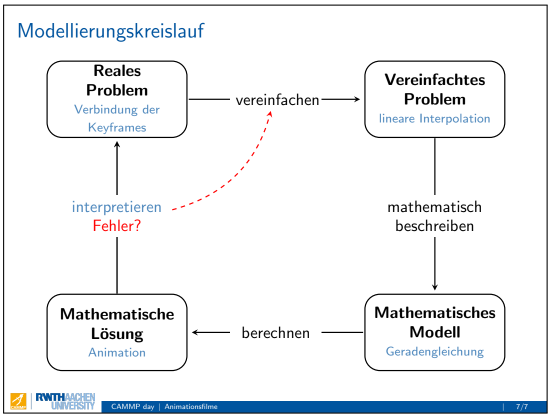

Modellierungskreislauf
Reales Problem
Verbindung der Keyframes
vereinfachen
Vereinfachtes Problem
lineare Interpolation
interpretieren
mathematisch beschreiben
Mathematische Lösung
berechnen
Mathematisches Modell
CAMMP day | Animationsfilme
5/7


Modellierungskreislauf
Reales Problem
Verbindung der Keyframes
vereinfachen
Vereinfachtes Problem
lineare Interpolation
interpretieren
mathematisch beschreiben
Mathematische Lösung
berechnen
Mathematisches Modell
CAMMP day | Animationsfilme
6/7


Modellierungskreislauf
Reales Problem
Verbindung der Keyframes
vereinfachen
Vereinfachtes Problem
lineare Interpolation
interpretieren
mathematisch beschreiben
Mathematische Lösung
berechnen
Mathematisches Modell
Geradengleichung
CAMMP day | Animationsfilme
6/7


Modellierungskreislauf
Reales Problem
Verbindung der Keyframes
vereinfachen
Vereinfachtes Problem
lineare Interpolation
interpretieren
mathematisch beschreiben
Mathematische Lösung
Animation
berechnen
mit MATLAB
Mathematisches Modell
Geradengleichung
CAMMP day | Animationsfilme
7/7


Modellierungskreislauf
Reales Problem
Verbindung der Keyframes
vereinfachen
Vereinfachtes Problem
lineare Interpolation
interpretieren
Fehler?
mathematisch beschreiben
Mathematische Lösung
Animation
berechnen
Mathematisches Modell
Geradengleichung
CAMMP day | Animationsfilme
7/7


Modellierungskreislauf
Reales Problem
Verbindung der Keyframes
vereinfachen
Vereinfachtes Problem
lineare Interpolation
interpretieren
Fehler?
mathematisch beschreiben
Mathematische Lösung
Animation
berechnen
Mathematisches Modell
Geradengleichung
CAMMP day | Animationsfilme
7/7

C.5. Notizen zum ersten Zwischenvortrag

CAMMP day
Animationsfilme

Hinweise zum ersten Zwischenvortrag

Sage den Schüler*innen, die mit dem ersten Blatt nicht fertig geworden sind, dass sie die Lösung von der Folie abschreiben können, wenn sie wollen, damit sie auch einmal die Animation anschauen können und den vollständigen Code haben. Lassen diesen SuS gegebenenfalls dafür Zeit bevor du mit dem Vortrag anfängst.

Lasse alle SuS ihre Laptops zuklappen, damit ihre Aufmerksamkeit nach Vorne gerichtet ist.

Folie 1 | Eröffnungsfolie
Nachdem ihr nun schon etwas selbstständig gearbeitet haben, betrachten wir jetzt das erste mathematische Modell mit der linearen Interpolation.

Folie 2+3 | Wo lassen sich die bisherigen Schritte im mathematischen Modellierungskreislauf wiederfinden?
Hier sollen Ideen von den SuS gesammelt werden, welche bisher erarbeiteten Schritte sich wo im mathematischen Modellierungskreislauf wiederfinden lassen.
Damit die SuS noch einmal den Modellierungskreislauf vor Augen haben, wird auf der nächsten Folie dieser ohne weitere Hinweise eingeblendet.

Folie 4 | Modellierungskreislauf
Das reale Problem bleibt weiterhin die Animation eines springenden Balles und somit die Verbindung der Keyframes.

Folie 5 | Modellierungskreislauf
Das vereinfachte Problem ist, wie im Einführungsvortrag gesagt wurde, die Interpolation, also die Verbindung der Keyframes auf eine bestimmt Art und Weise. Hier in diesem Fall ist es die lineare Interpolation.

Folie 6 | Modellierungskreislauf
Im ersten mathematischen Modell habt ihr die linearen Interpolation durch eine allgemeine Geradengleichung beschrieben.

Folie 7 | Modellierungskreislauf
Und MATLAB hat mit Hilfe der eingegeben Formeln eine Animation erstellt, welche wie folgt aussah. Hier kommt der Bezug zu Aufgabe 2 des Arbeitsblatts. Diskutiere mit den SuS zusammen darüber, ob die erstellte Animation schon zufriedenstellend ist und der Realität entspricht.
Was müsste verbessert werden?
Das Ergebnis ist, dass die lineare Interpolation für unsere Zwecke leider kein gutes mathematisches Modell darstellt. Gibt es denn andere Situationen in denen die lineare Interpolation dennoch sinnvoll ist? (Rückbezug zu Aufgabenteil c))
Man sieht, dass die Interpolationsart von der zu interpolierenden Situation abhängt. Wir müssen jetzt, da das bisherige Modell nicht zufriedenstellend ist, überlegen, wo wir einen Fehler gemacht haben, so dass wir unser Modell verbessern können.
Bei der Vereinfachung kann kein Fehler unterlaufen sein, da die Hoch- und Tiefpunkt ausgewählt wurden, welche essentiell für die Bewegung des springenden Balles sind.
Bleibt nur noch, dass wir bei den anderen beiden Schritten Fehler gemacht haben. Wenn wir davon ausgehen, dass unser Code richtig ist, dann müssen wir bei der mathematischen Beschreibung neu Ansetzen und ein neues mathematisches Modell mit Hilfe einer neuen Verbindungsart der Punkte erstellen.

Synfig | Besprechung von Aufgabe 3

Lasse einen Schüler / eine Schülerin nach Vorne kommen, damit dieser / diese vorführen kann, wie er / sie die Animation des Autos erstellt haben. Dabei kann auch auf Besonderheiten oder Schwierigkeiten eingegangen werden. Die SuS sollten alle Schritte so erklären, dass SuS, die die Bearbeitung der Aufgabe alle Schritte verstehen und parallel diese durchführen können.

CAMMP day

Animationsfilme

CAMMP

RWTH AACHEN UNIVERSITY

1. Modellverbesserung

- Arbeitsblatt 2 -

Da die lineare Interpolation für unsere Zwecke kein gutes mathematisches Modell darstellt, interpolieren wir nun, indem wir durch alle vorgegebenen Punkte eine Polynomfunktion legen. Ein Polynomfunktion ist eine ganzrationale Funktion.

Aufgabe 1 | Polynominterpolation

a) Es sind acht Punkte vorgegeben, wobei jeder Punkt auf dem Graph liegen muss. Von welchem Grad ist das Polynom, das die Punkte interpoliert? Wie viele Gleichungen werden, zum Finden des Polynoms, dementsprechend benötigt?
Hinweis: Zu dieser Aufgabe liegen zwei Hilfekarten 5 und 6 aus, die du bei Bedarf nutzen kannst.

b) Stelle die Normalform für ein solches Polynom auf. Verwende hierbei die Koeffizienten $c, d, e, f, g, l,$ m und n.

c) Erstelle unter Verwendung der Punkte $P_1(t_1|h_1), P_2(t_2|h_2), \ldots, P_9(t_7|h_7), P_8(t_8|h_8)$ ein Gleichungssystem zur Bestimmung der einzelnen Koeffizienten der Normalform.
Hinweis: Zu dieser Aufgabe liegen zwei Hilfekarten 7 und 8 aus, die du bei Bedarf nutzen kannst.

d) Formuliere deine einzelnen Gleichungen vom Gleichungssystem um, so dass du Nullgleichungen hast. Eine Nullgleichung ist eine Gleichung, die auf einer Seite „$= 0$" stehen hat.

e) Gib dein Gleichungssystem aus d) in MATLAB ein, indem du in den Zeilen $13 - 20$ in MATLAB deine Nullgleichungen ohne „$= 0$" eingibst.
Hinweis: Mit der Tastenkombination „cmd + c" kopierst du markierte Passagen.
Überprüfe dein Gleichungssystem, indem du erneut auf den Button Run Section klickst.
Hinweis: Verwende wieder die Schreibweisen des Variablen-Zettels.

Du erkennst, ob deine Lösung richtig ist, wenn die erstellte Animation durch die gekennzeichneten Keyframe-Punkte verläuft.

Aufgabe 2 | Interpretation der Polynominterpolation

a) Beurteile erneut die Qualität der erstellten Animation auf ihre Realitätsnähe hin. Stellt das animierte Bild die Bewegung eines springenden Balles dar?

Im Folgenden wollen wir den Einfluss der gegebenen Anzahl von Punkten auf die Polynominterpolation untersuchen.

b) In Zeilen 30 und 31 sind zwei neue Vektoren t und h gegeben. Sie unterscheiden sich von vorherigen t und h dadurch, dass sie durch zwei Einträge ergänzt wurden. Ändere das Gleichungssystem entsprechend ab und gib dies in Zeilen $32 - 41$ ein. Verwende dabei $a, b, c, d, e, f, g, l, m$ und n als Koeffizienten. Lasse das Programm durchlaufen, indem du auf den Button Run Section klickst.
Beurteile die Qualität im Vergleich zu Aufgabenteil a), indem du die neue Animation mit der aus Aufgabe 1 e) vergleichst.

c) Ist es sinnvoll die Polynominterpolation zur Erstellung von Animationen zu verwenden? Begründe deine Antwort und nenne gegebenenfalls eine Situation in der die Anwendung geeignet ist.

Melde dich und frage nach Arbeitsblatt 3, wenn du mit diesem Blatt fertig bist!

1/1

C.7. Zusatzmaterial von Arbeitsblatt 2

C.7.1. Hilfekarten

CAMMP day

Animationsfilme

Hilfekarten zur 1. Modellverbesserung

Aufgabe 1 a) | Hilfekarte 5

Skizziere zwei Punkte in ein Koordinatensystem und überlege, welche Funktion durch eine Verbindung der Punkte definiert wird. Bestimme den Grad dieser Funktion.
Wiederhole diesen Schritt für eine immer größer werdende Anzahl von Punkten.

Aufgabe 1 a) | Hilfekarte 6

Zeichne eine Gerade, eine Parabel und eine kubische Funktion und notiere die Normalform dieser Funktionen daneben.
Bestimme jeweils den Grad und die Anzahl der unbekannten Koeffizienten der einzelnen Funktionen. Der Grad der Funktion ist gleich dem größten Exponent von t, der in der Funktionsgleichung vorkommt.

Aufgabe 1 c) | Hilfekarte 7

Es sind folgende Punkte gegeben: $P_1(1|4)$, $P_2(3|0)$ und $P_3(5|2)$.
Bestimme die ganzrationale Funktion zweiten Grades, die durch die drei Punkte definiert wird. Stelle hierfür ein lineares Gleichungssystem auf.
Du kannst dein Ergebnis mit der Vorne ausliegenden Musterlösung vergleichen.
Übertrage anschließend dein Vorgehen auf die Problemstellung mit acht unbekannten Punkten.

Aufgabe 1 c) | Hilfekarte 8

Schau deine Vorgehensweise von Hilfekarte 7 an. Dort verläuft das Polynom durch die gegeben Punkte, ebenso ist das bei dem gesuchten Polynom vom Aufgabenblatt 2. Das gesuchte Polynom läuft durch alle acht gegebenen Punkte. Deshalb kannst du für dein t und h aus deiner Gleichung die verschiedenen Werte t_i und h_i einsetzen.

C.7.2. Lösung von Hilfekarte 7

CAMMP day

Animationsfilme

Lösung Hilfekarte 7

Durch die drei Punkte wird eine Parabel definiert. Die allgemeine Funktionsgleichung lautet:

$$h = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$$

Da es drei Unbekannte gibt, benötigt man drei Gleichungen, um die gesuchte Funktionsgleichung bestimmen zu können und somit besteht auch das Gleichungssystem aus drei Gleichungen.

$$\begin{array}{rrcl} \text{I.} & 4 & = & a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c \\ \text{II.} & 0 & = & a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 9 \cdot a + 3 \cdot b + c \\ \text{III.} & 2 & = & a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 25 \cdot a + 5 \cdot b + c \end{array}$$

1/1

CAMMP day
Animationsfilme

Musterlösung zur 1. Modellverbesserung

Aufgabe 1 | Polynominterpolation

a) + b) Durch alle Punkte wird ein Polynom siebten Grades gelegt, weshalb acht Gleichungen benötigt werden, da acht Unbekannte vorhanden sind:

$$h = c \cdot t^7 + d \cdot t^6 + e \cdot t^5 + f \cdot t^4 + g \cdot t^3 + l \cdot t^2 + m \cdot x + n \tag{1}$$

c) Das Gleichungssystem besteht aus acht Gleichungen, nämlich alle acht Punkte t_i eingesetzt in Gleichung (1):

$$\begin{aligned}
h_1 &= c \cdot t_1^7 + d \cdot t_1^6 + e \cdot t_1^5 + f \cdot t_1^4 + g \cdot t_1^3 + l \cdot t_1^2 + m \cdot t_1 + n \\
h_2 &= c \cdot t_2^7 + d \cdot t_2^6 + e \cdot t_2^5 + f \cdot t_2^4 + g \cdot t_2^3 + l \cdot t_2^2 + m \cdot t_2 + n \\
h_3 &= c \cdot t_3^7 + d \cdot t_3^6 + e \cdot t_3^5 + f \cdot t_3^4 + g \cdot t_3^3 + l \cdot t_3^2 + m \cdot t_3 + n \\
h_4 &= c \cdot t_4^7 + d \cdot t_4^6 + e \cdot t_4^5 + f \cdot t_4^4 + g \cdot t_4^3 + l \cdot t_4^2 + m \cdot t_4 + n \\
h_5 &= c \cdot t_5^7 + d \cdot t_5^6 + e \cdot t_5^5 + f \cdot t_5^4 + g \cdot t_5^3 + l \cdot t_5^2 + m \cdot t_5 + n \\
h_6 &= c \cdot t_6^7 + d \cdot t_6^6 + e \cdot t_6^5 + f \cdot t_6^4 + g \cdot t_6^3 + l \cdot t_6^2 + m \cdot t_6 + n \\
h_7 &= c \cdot t_7^7 + d \cdot t_7^6 + e \cdot t_7^5 + f \cdot t_7^4 + g \cdot t_7^3 + l \cdot t_7^2 + m \cdot t_7 + n \\
h_8 &= c \cdot t_8^7 + d \cdot t_8^6 + e \cdot t_8^5 + f \cdot t_8^4 + g \cdot t_8^3 + l \cdot t_8^2 + m \cdot t_8 + n
\end{aligned}$$

d) Die Gleichungen des Gleichungssystems werden, damit sie in MATLAB eingegeben werden können, zu Nullgleichungen umformuliert:

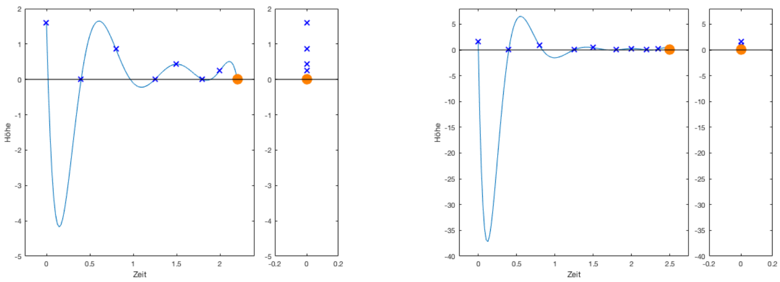
$$\begin{aligned}
c \cdot t_1^7 + d \cdot t_1^6 + e \cdot t_1^5 + f \cdot t_1^4 + g \cdot t_1^3 + l \cdot t_1^2 + m \cdot t_1 + n - h_1 &= 0 \\
c \cdot t_2^7 + d \cdot t_2^6 + e \cdot t_2^5 + f \cdot t_2^4 + g \cdot t_2^3 + l \cdot t_2^2 + m \cdot t_2 + n - h_2 &= 0 \\
c \cdot t_3^7 + d \cdot t_3^6 + e \cdot t_3^5 + f \cdot t_3^4 + g \cdot t_3^3 + l \cdot t_3^2 + m \cdot t_3 + n - h_3 &= 0 \\
c \cdot t_4^7 + d \cdot t_4^6 + e \cdot t_4^5 + f \cdot t_4^4 + g \cdot t_4^3 + l \cdot t_4^2 + m \cdot t_4 + n - h_4 &= 0 \\
c \cdot t_5^7 + d \cdot t_5^6 + e \cdot t_5^5 + f \cdot t_5^4 + g \cdot t_5^3 + l \cdot t_5^2 + m \cdot t_5 + n - h_5 &= 0 \\
c \cdot t_6^7 + d \cdot t_6^6 + e \cdot t_6^5 + f \cdot t_6^4 + g \cdot t_6^3 + l \cdot t_6^2 + m \cdot t_6 + n - h_6 &= 0 \\
c \cdot t_7^7 + d \cdot t_7^6 + e \cdot t_7^5 + f \cdot t_7^4 + g \cdot t_7^3 + l \cdot t_7^2 + m \cdot t_7 + n - h_7 &= 0 \\
c \cdot t_8^7 + d \cdot t_8^6 + e \cdot t_8^5 + f \cdot t_8^4 + g \cdot t_8^3 + l \cdot t_8^2 + m \cdot t_8 + n - h_8 &= 0
\end{aligned}$$

e) Bei der Eingabe des Gleichungssystems in MATLAB muss darauf geachtet werden, dass bei jeder Nullgleichung jeweils nur die linke Seite eingegeben wird, also $= 0$ weggelassen wird.
Es entsteht die Animation deren Graph in Bild (a) auf der nächsten Seite gezeigt wird.

Lasse den Schüler*innen immer genügend Zeit, um die Lösung von der Folie abzuschreiben, falls sie es selbst nicht geschafft haben und sie die Animation aber noch sehen und den Code vervollständigen wollen.

1/2

Aufgabe 2 | Interpretation der Polynominterpolation



(a) Polynominterpolation bei zehn Punkten

(b) Polynominterpolation bei acht Punkten

a) Vor allem an dem Graph zwischen den ersten beiden Keyframe Punkten wird klar, dass die Interpolationsweise hier keinen Sinn ergibt, da der Ball ungefähr 4m in den Boden hinein geht. Darüber hinaus fliegt der Ball nach dem Herauskommen aus dem Boden höher als der Punkt, an dem er losgelassen wurde.

b) Der neue t- und h-Vektor ist um zwei Einträge verlängert:

$$\vec{t} = [0\ 0.4\ 0.8\ 1.25\ 1.5\ 1.8\ 2\ 2.2\ 2.35\ 2.5]$$

$$\vec{h} = [1.6\ 0\ 0.86\ 0\ 0.43\ 0\ 0.25\ 0\ 0.15\ 0]$$

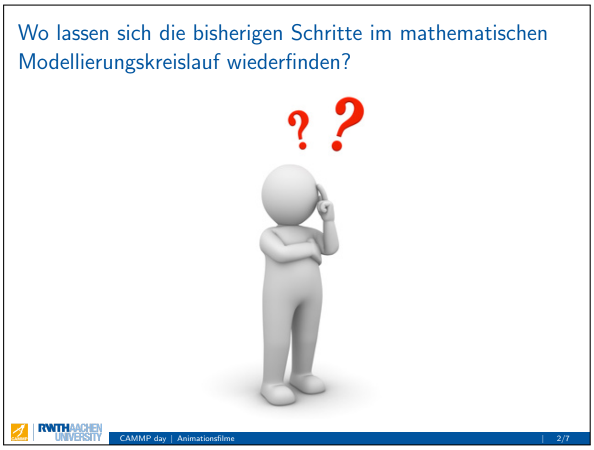
Da die Vektoren nun länger sind, muss auch das Gleichungssystem angepasst werden. Es werden nun zehn Gleichungen benötigt, die wieder als Nullgleichungen eingegeben werden müssen:

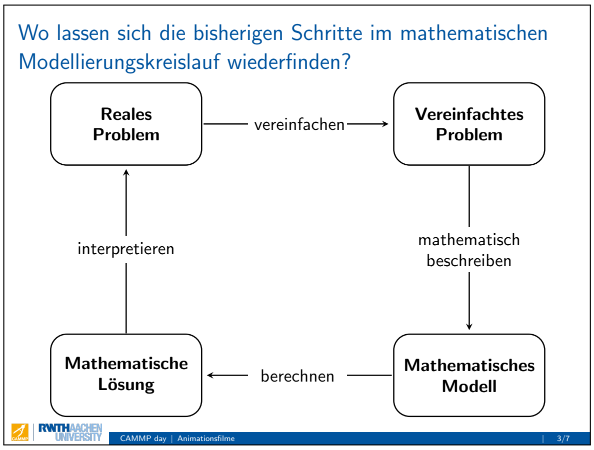
$$\begin{aligned}
h_1 &= a \cdot t_1^9 + b \cdot t_1^8 + c \cdot t_1^7 + d \cdot t_1^6 + e \cdot t_1^5 + f \cdot t_1^4 + g \cdot t_1^3 + l \cdot t_1^2 + m \cdot t_1 + n \\
h_2 &= a \cdot t_2^9 + b \cdot t_2^8 + c \cdot t_2^7 + d \cdot t_2^6 + e \cdot t_2^5 + f \cdot t_2^4 + g \cdot t_2^3 + l \cdot t_2^2 + m \cdot t_2 + n \\
h_3 &= a \cdot t_3^9 + b \cdot t_3^8 + c \cdot t_3^7 + d \cdot t_3^6 + e \cdot t_3^5 + f \cdot t_3^4 + g \cdot t_3^3 + l \cdot t_3^2 + m \cdot t_3 + n \\
h_4 &= a \cdot t_4^9 + b \cdot t_4^8 + c \cdot t_4^7 + d \cdot t_4^6 + e \cdot t_4^5 + f \cdot t_4^4 + g \cdot t_4^3 + l \cdot t_4^2 + m \cdot t_4 + n \\
h_5 &= a \cdot t_5^9 + b \cdot t_5^8 + c \cdot t_5^7 + d \cdot t_5^6 + e \cdot t_5^5 + f \cdot t_5^4 + g \cdot t_5^3 + l \cdot t_5^2 + m \cdot t_5 + n \\
h_6 &= a \cdot t_6^9 + b \cdot t_6^8 + c \cdot t_6^7 + d \cdot t_6^6 + e \cdot t_6^5 + f \cdot t_6^4 + g \cdot t_6^3 + l \cdot t_6^2 + m \cdot t_6 + n \\
h_7 &= a \cdot t_7^9 + b \cdot t_7^8 + c \cdot t_7^7 + d \cdot t_7^6 + e \cdot t_7^5 + f \cdot t_7^4 + g \cdot t_7^3 + l \cdot t_7^2 + m \cdot t_7 + n \\
h_8 &= a \cdot t_8^9 + b \cdot t_8^8 + c \cdot t_8^7 + d \cdot t_8^6 + e \cdot t_8^5 + f \cdot t_8^4 + g \cdot t_8^3 + l \cdot t_8^2 + m \cdot t_8 + n \\
h_9 &= a \cdot t_9^9 + b \cdot t_9^8 + c \cdot t_9^7 + d \cdot t_9^6 + e \cdot t_9^5 + f \cdot t_9^4 + g \cdot t_9^3 + l \cdot t_9^2 + m \cdot t_9 + n \\
h_{10} &= a \cdot t_{10}^9 + b \cdot t_{10}^8 + c \cdot t_{10}^7 + d \cdot t_{10}^6 + e \cdot t_{10}^5 + f \cdot t_{10}^4 + g \cdot t_{10}^3 + \cdot t_{10}^2 + m \cdot t_{10} + n
\end{aligned}$$

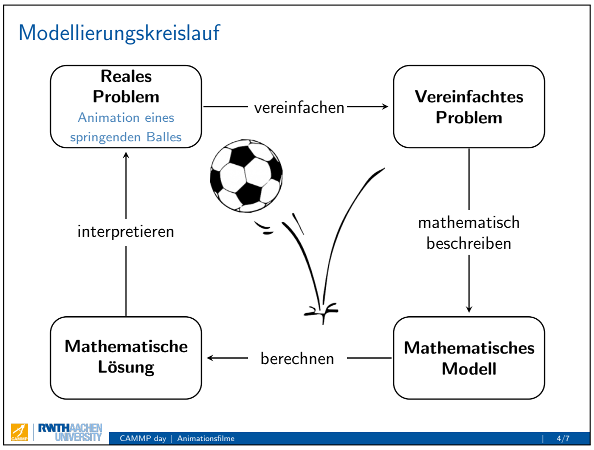
Für diesen Fall wird die Animation noch schlechter, wie in Bild (a) und(b) oben gesehen werden kann.

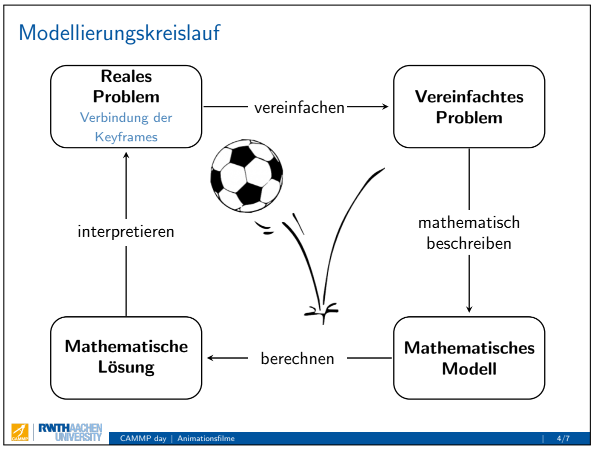
c) Dadurch, dass die Polynominterpolation so sensibel gegenüber der Anzahl der Keyframes ist, eignet sie sich nicht zur Erstellung von Animationen. Werden die Graphen betrachtet, fällt es schwer eine Situation zu benennen in der solche ein Verlauf Verwendung hätte.

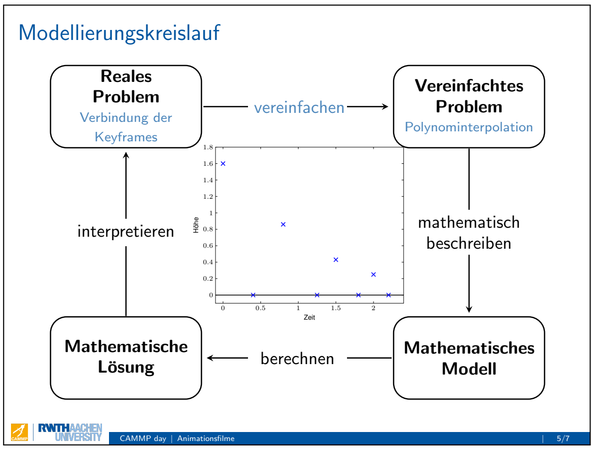
C.9. Zweiter Zwischenvortrag

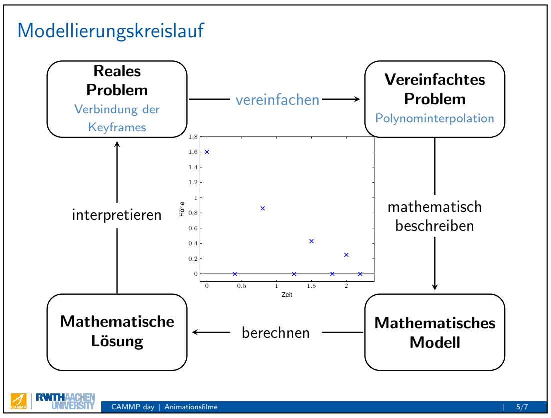


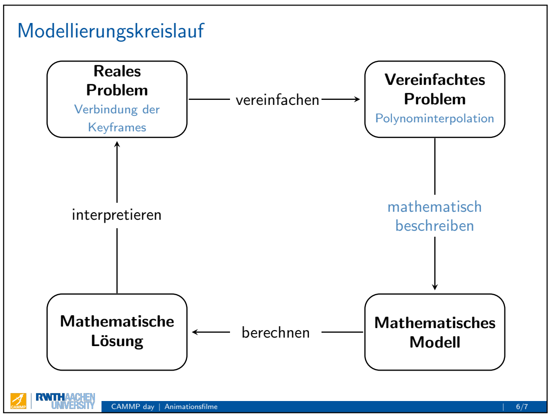


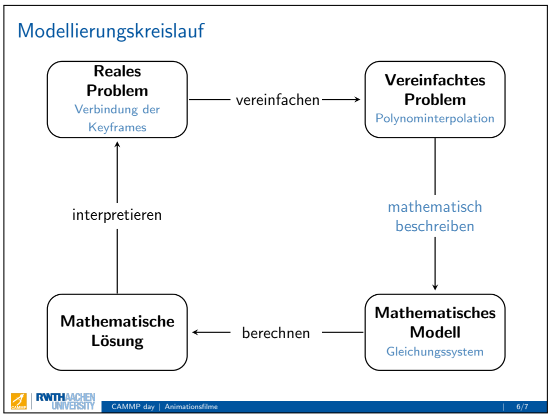


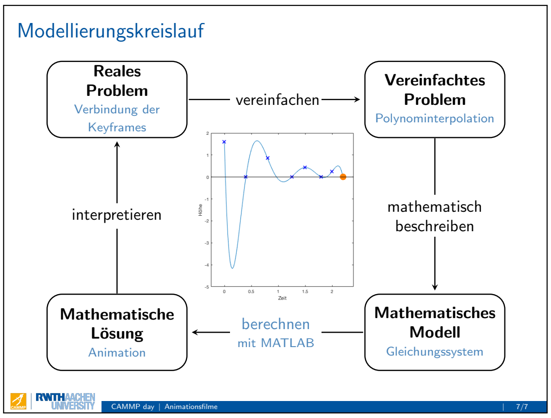


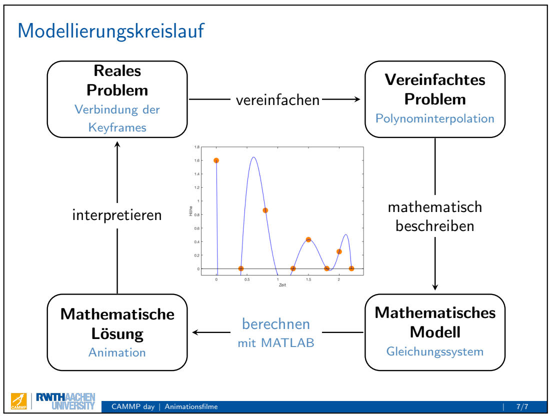


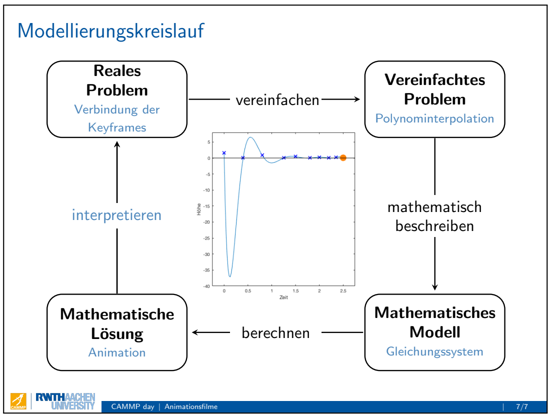

Modellierungskreislauf
Reales Problem
Verbindung der Keyframes
vereinfachen
Vereinfachtes Problem
Polynominterpolation
interpretieren
mathematisch beschreiben
Mathematische Lösung
berechnen
Mathematisches Modell
Höhe
Zeit
CAMMP day | Animationsfilme
5/7

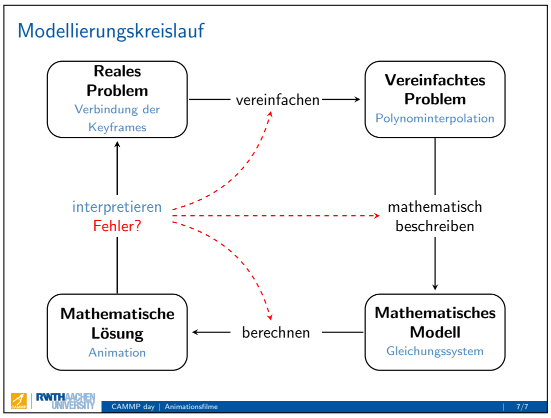

Modellierungskreislauf
Reales Problem
Verbindung der Keyframes
vereinfachen
Vereinfachtes Problem
Polynominterpolation
interpretieren
mathematisch beschreiben
Mathematische Lösung
berechnen
Mathematisches Modell
CAMMP day | Animationsfilme
6/7

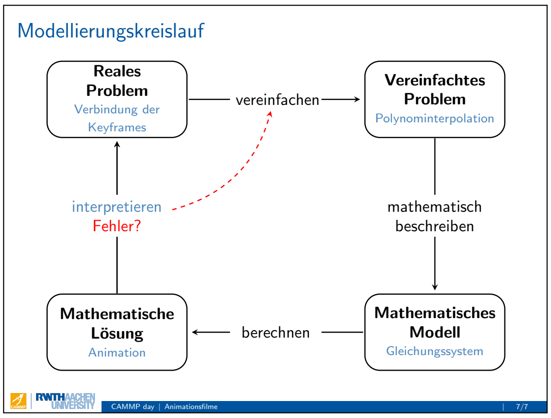

Modellierungskreislauf
Reales Problem
Verbindung der Keyframes
vereinfachen
Vereinfachtes Problem
Polynominterpolation
interpretieren
mathematisch beschreiben
Mathematische Lösung
berechnen
Mathematisches Modell
Gleichungssystem
CAMMP day | Animationsfilme
6/7


Modellierungskreislauf
Reales Problem
Verbindung der Keyframes
vereinfachen
Vereinfachtes Problem
Polynominterpolation
interpretieren
mathematisch beschreiben
Mathematische Lösung
Animation
berechnen
mit MATLAB
Mathematisches Modell
Gleichungssystem
CAMMP day | Animationsfilme
7/7


Modellierungskreislauf
Reales Problem
Verbindung der Keyframes
vereinfachen
Vereinfachtes Problem
Polynominterpolation
interpretieren
mathematisch beschreiben
Mathematische Lösung
Animation
berechnen
mit MATLAB
Mathematisches Modell
Gleichungssystem
CAMMP day | Animationsfilme
7/7


Modellierungskreislauf
Reales Problem
Verbindung der Keyframes
vereinfachen
Vereinfachtes Problem
Polynominterpolation
interpretieren
mathematisch beschreiben
Mathematische Lösung
Animation
berechnen
Mathematisches Modell
Gleichungssystem
CAMMP day | Animationsfilme
7/7


Modellierungskreislauf
Reales Problem
Verbindung der Keyframes
vereinfachen
Vereinfachtes Problem
Polynominterpolation
interpretieren
Fehler?
mathematisch beschreiben
Mathematische Lösung
Animation
berechnen
Mathematisches Modell
Gleichungssystem
CAMMP day | Animationsfilme
7/7


Modellierungskreislauf
Reales Problem
Verbindung der Keyframes
vereinfachen
Vereinfachtes Problem
Polynominterpolation
interpretieren
Fehler?
mathematisch beschreiben
Mathematische Lösung
Animation
berechnen
Mathematisches Modell
Gleichungssystem
CAMMP day | Animationsfilme
7/7

C.10. Notizen zum zweiten Zwischenvortrag

CAMMP day

Animationsfilme

Hinweise zum zweiten Zwischenvortrag

Sage den SuS, die mit dem ersten Blatt nicht fertig geworden sind, dass sie die Lösung von der Folie abschreiben können, wenn sie wollen, damit sie auch einmal die Animation anschauen können und den vollständigen Code haben. Lassen diesen SuS gegebenenfalls dafür Zeit bevor du mit dem Vortrag anfängst.

Lasse alle SuS ihre Laptops zuklappen, damit ihre Aufmerksamkeit nach Vorne gerichtet ist.

Folie 1 | Eröffnungsfolie

Betrachten wir nun das zweite schon verbesserte mathematische Modell mit der Polynominterpolation.

Folie 2+3 | Wo lassen sich die bisherigen Schritte im mathematischen Modellierungskreislauf wiederfinden?

Hier sollen Ideen von den SuS gesammelt werden, welche bisher erarbeiteten Schritte sich wo im mathematischen Modellierungskreislauf wiederfinden lassen.
Damit die SuS noch einmal den Modellierungskreislauf vor Augen haben, wird auf der nächsten Folie dieser ohne weitere Hinweise eingeblendet.

Folie 4 | Modellierungskreislauf

Das reale Problem bleibt weiterhin die Animation eines springenden Balles.

Folie 5 | Modellierungskreislauf

Das vereinfachte Problem ist, wie im Einführungsvortrag gesagt wurde, die Interpolation, also die Verbindung der Keyframes auf eine bestimmt Art und Weise. Hier in diesem Fall ist es die Polynominterpolation.

Folie 6 | Modellierungskreislauf

Im zweiten mathematischen Modell habt ihr die Polynominterpolation durch ein Gleichungssystem beschrieben.

Folie 7 | Modellierungskreislauf

Interpretiere zusammen mit den Schüler*innen (Rückbezug zu Aufgabe 2), warum die Polynominterpolation bei dieser Situation kein sinnvolles mathematisches Modell ergibt.
MATLAB hat mit Hilfe der eingegeben Formeln eine Animation erstellt, welche für unsere Zwecke leider kein gutes mathematisches Modell darstellt. Der Ball gelangt 35 m in den Boden hinein und betrachten wir den Graph aus der Nähe, so ergeben die Verläufe durch die Punkte in dem Sachzusammenhang keinen Sinn.
Lässt man die letzten zwei Punkte weg, so wird der Graph besser im dem Sinne, dass der Ball weniger tief in den Boden eindringt, jedoch bleibt es für unsere Zwecke kein sinnvolles mathematisches Modell.
Vielmehr schlägt die Polynominterpolation immer stärker aus, je mehr Keyframes angegeben sind. Deshalb wird sie tatsächlich nie zur Erstellung von Animationen verwendet. Deshalb fällt es so schwer Situationen anzugeben, in denen diese sinnvoll wäre.
Trotzdem müssen wir im Zuge der Interpolation erneut überlegen, wo wir einen Fehler gemacht haben, so dass wir unser Modell verbessern können.
Aus den gleichen Gründen wie vorhin, müssen wir uns erneut Gedanken über ein neues mathematisches Modell machen.

1/1

CAMMP day

Animationsfilme

2. Modellverbesserung

- Arbeitsblatt 3 -

Nachdem wir herausgefunden haben, dass die mathematischen Modelle der linearen Interpolation und der Polynominterpolation keine guten Modelle eines springenden Balles darstellen, betrachten wir nun noch eine weitere Art der Interpolation, genannt stückweise hermitesche Interpolation.
Dabei bleiben wir beim Polynomgedanken, nur dass nicht ein Polynom für alle acht Punkte gesucht wird, sondern immer ein sogenanntes kubisches Polynom (Funktion vom Grad 3) zwischen zwei Punkte gelegt wird (siehe Bild 1).

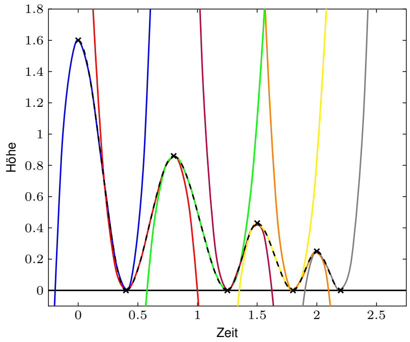


Bild 1: Bild durch hermitesche Interpolation

Aufgabe 1 | Hermitesche Interpolation

Gegeben sind wieder die acht Keyframes des springenden Balles und zusätzlich die erste Ableitung df_i mit $i = 1, \ldots, 8$ in jedem Punkt.
Wir betrachten nun immer nur den Abschnitt zwischen zwei Punkten $P_i(t_i|h_i)$ und $P_{i+1}(t_{i+1}|h_{i+1})$ und wollen die Polynomfunktion für einen einzelnen Abschnitt bestimmen.

a) Welchen maximalen Grad kann jedes einzelne Polynom annehmen? Lies hierfür ggf. noch einmal den Text oben.

b) Gib die Gleichung für die gesuchte Normalform und die Gleichung für ihre allgemeine Ableitung an.

c) Wie viele unbekannte Koeffizienten hat die Normalform und wie viele Gleichungen werden benötigt, um alle Unbekannten bestimmen zu können?

d) Stelle ein Gleichungssystem unter Verwendung der Normalform und ihrer Ableitung auf. Verwende dabei die Koeffizienten a, b, c und d und $df1$ für die Ableitungen in den Keyframes.

e) Gib dein Gleichungssystem als Nullgleichungen ohne „=0“ in Zeilen $65 - 68$ ein.
Überprüfe dein Gleichungssystem, indem du auf den Button Run Section klickst. Ignoriere für diesen Schritt die erstellte Animation und schließe sie nachdem sie durchgelaufen ist.
Du erkennst, ob dein Gleichungssystem richtig ist, wenn im Command Window steht, dass deine Lösung korrekt ist.

Im weiteren wird nun die Steigung an den einzelnen Keyframes der Bewegung eines springenden Balles angepasst. Deshalb musst du das verwendete $df1$ in deinem Gleichungssystem durch $df2$ ersetzen. Warum erfährst du in den nächsten Aufgabenteilen.
In Zeile 55 soll der Vektor $df2$ mit der ersten Ableitung in allen Punkten stehen. Dafür musst du nacheinander Aufgabenteile e) und f) bearbeiten.

1/2

Aufgabe 2 | Interpretation der linearen Interpolation

a) Beurteile die Qualität der Animation durch lineare Interpolation in Bezug auf die realitätsgetreue Darstellung der Bewegung eines springenden Balles. Betrachte dazu erneut das von MATLAB erstellte animierte Bild, indem du noch einmal auf den Button Run Section drückst.

b) Nenne einige Verbesserungsmöglichkeiten in Bezug auf die Bewegung eines springenden Balles.

c) Gib mindestens eine Situation bzw. Bewegung an, die anhand der linearen Interpolation gut interpoliert werden könnte.

Aufgabe 3 | Gerade Straße

In dieser Aufgabe wirst du mit Synfig arbeiten und selbst eine Animation erstellen. Synfig ist ein Programm, das benutzt werden kann, um Animationen zu erstellen, welche verschiedene Interpolationsweisen benötigen. Ziel ist es, das Auto die gerade Straße entlang fahren zu lassen.

- Öffne zunächst *Synfig*. Geh oben links auf *Datei* → *Öffnen* → *Schreibtisch* → *Synfig* → *gerade_Strasse* → *Synfig_gerade_Strasse_SuS*.
- Die Animation die du erstellen wirst, wird 50 Bilder lang sein, wobei 24 Bilder pro Sekunde gezeigt werden. Das bedeutet, dass sie fast 2 Sekunden dauern wird.
- Klicke zum Festlegen der **Interpolationsmethode** am unteren Rand des großen mittleren Feldes auf Fließend und wähle Linear aus.
- Klicke auf das grüne Männchen, welches den **Animationsmodus aktiviert**. Durch das Anklicken sollte es rot werden und zusätzlich ein roter Rahmen um das mittlere Fenster erscheinen.

Da wir die lineare Interpolation ausgewählt haben, sind lediglich ein Keyframe am Anfang und einer am Ende der Animation notwendig, also am Start- und Endpunkt.

- Wähle zum Erstellen der **Keyframes** unten rechts im Ebenen-Menü die Ebene „Ford-Mustang“ aus, damit du das Auto bewegen kannst.
- Den **Zeitpunkt** kannst du entweder unten im mittleren Feld bei der Zeitleiste durch ein Klicken in die dunkel graue Leiste festlegen. Bei dem Zeitpunkt erscheint anschließend ein orangefarbener Strich. Klicke nun unten links in dem Fenster auf den Reiter *Schlüsselbilder*. Dort werden die **Keyframes** aufgelistet, die du bereits erstellt hast. Durch einen Klick auf das unten links, kannst du weitere Schlüsselbilder hinzufügen, nachdem du im Hauptfenster in der Mitte die neue Position deines Autos eingestellt hast.
- Ist deine Animation fertiggestellt, kannst du sie dir anschauen, indem du auf den -Button und anschließend auf den -Button klickst. Zum Beenden des Animationsmodus musst du auf das rote Männchen klicken, welches dann wieder wie anfänglich grün wird.
- Um die Animation so zu **speichern**, dass sie außerhalb von Synfig angeschaut werden kann, muss sie erst gerendert werden, was so viel heißt wie berechnen bzw. ausgeben. Klicke hierfür erneut auf das Quadrat bei den Linealen und danach auf *Datei*. Dort musst du auf *Rendern* klicken und den Ordner aussuchen in dem die Animation gespeichert werden soll, indem du auf *wählen* klickst. Wähle am besten einfach den *Schreibtisch*. In der zweiten Zeile musst du *gif* auswählen.

Melde dich und frage nach Arbeitsblatt 2, wenn du mit diesem Blatt fertig bist!

2/2

C.12. Zusatzmaterial von Arbeitsblatt 3

C.12.1. Hilfekarten

CAMMP day

Animationsfilme

CAMMP | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Hilfekarten zur 2. Modellverbesserung

Aufgabe 1 | Hilfekarte 9

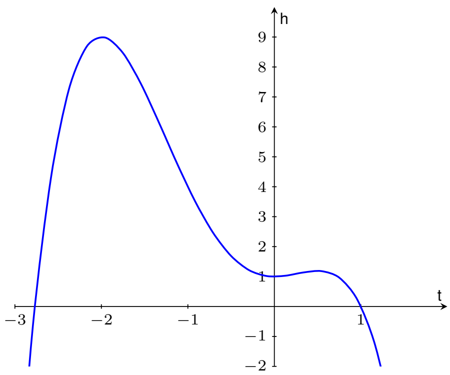
Es handelt sich bei den ungeraden Einträgen von df um die ersten Ableitungen an den Punkten P_1, P_3, P_5 und P_7. Diese Punkte sollen Hochpunkte sein.

Aufgabe 1 | Hilfekarte 10

Gegeben ist die Funktion: $f(t) = -t^2 - 6 \cdot t + 4$. Berechne die Extremstelle dieser Funktion.
Um welche Art von Extremstelle handelt es sich?
Welchen Wert hast du hier für die erste Ableitung an der Extremstelle verwendet?

Aufgabe 1 | Hilfekarte 11

Markiere die Hochpunkte der Funktion.
Welche Steigung hat die Funktion in diesen Punkten?



C.13. Musterlösung von Arbeitsblatt 3

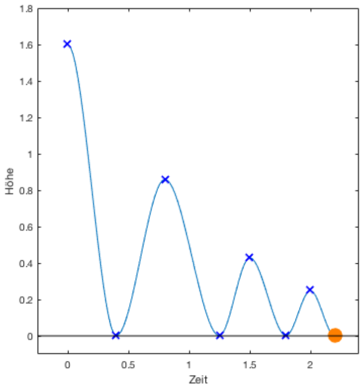
CAMMP day

Animationsfilme

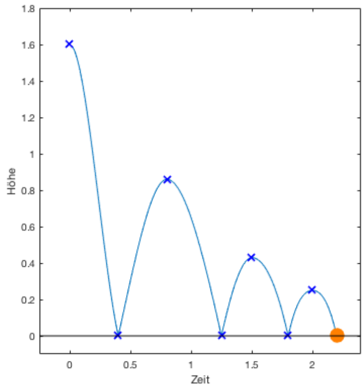
Musterlösung zur 2. Modellverbesserung

Aufgabe 1 | Hermitesche Interpolation

In dieser Aufgabe werden wieder die ursprünglichen acht Keyframes verwendet.



(a) Alle Ableitungen gleich Null



(b) Ableitung an geraden Punkten gleich 3 bzw. -3

a) Es handelt sich jeweils um kubische Polynome zwischen zwei Punkten, also ist der maximale Grad gleich 3.

b)

$$h = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$$
$$df = h' = 3 \cdot a \cdot t^2 + 2 \cdot b \cdot t + c$$

c) Man hat vier Unbekannte und dementsprechend benötigt man vier Gleichungen.

d) Wurden die einzelnen Gleichungen schon zu Nullgleichungen umgeformt, so lautet das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
a \cdot t_i^3 + b \cdot t_i^2 + c \cdot t_i + d - h_i &= 0 \\
a \cdot 3 \cdot t_i^2 + b \cdot 2 \cdot t_i + c - df1_i &= 0 \\
a \cdot t_{i+1}^3 + b \cdot t_{i+1}^2 + c \cdot t_{i+1} + d - h_{i+1} &= 0 \\
a \cdot 3 \cdot t_{i+1}^2 + b \cdot 2 \cdot t_{i+1} + c - df1_{i+1} &= 0
\end{aligned}$$

Lasse den Schüler*innen immer genügend Zeit, um die Lösung von der Folie abzuschreiben, falls sie es selbst nicht geschafft haben und sie die Animation aber noch sehen und den Code vervollständigen wollen.

e) An den ungeraden Punkten liegen Hochpunkte vor. An diesen muss aus diesem Grund die erste Ableitung gleich Null gesetzt werden. Der zu erstellende df Vektor sieht, dann so aus:

$$df = [0\ NaN\ 0\ NaN\ 0\ NaN\ 0\ NaN\ 0\ NaN]$$

f) Die Schüler*innen sollen erkennen, dass der von links kommende Graph an einem geraden Punkt eine negative Steigung haben muss und der von rechts kommende eine positive.

1/2

Ein guter Wert für den die hermitesche Interpolation die Bewegung eines springenden Balles darstellen, liegt bei 3 (siehe Bild 1).
Werden Werte größer als 5 bzw. kleiner als -5 eingesetzt, so erscheinen rechts und links von den Hochpunkten weitere Hochpunkte, die im Bezug auf die Bewegung des springenden Balles keinen Sinn machen.
Werden Zahlen kleiner als 3 bzw. größer als -3 eingesetzt, so bekommt der Graph einen Wendepunkt und die Steigung am Tiefpunkt ist nicht mehr steil genug, um die Realität widerzuspiegeln (siehe Bild 2).

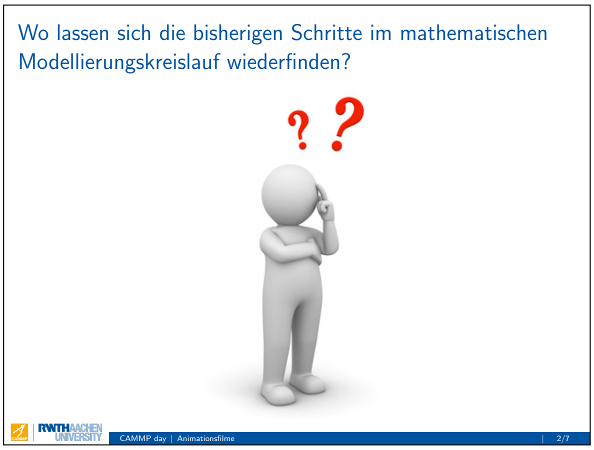
Der entstehende Graph ist weiterhin stetig, allerdings nicht überall stetig differenzierbar.

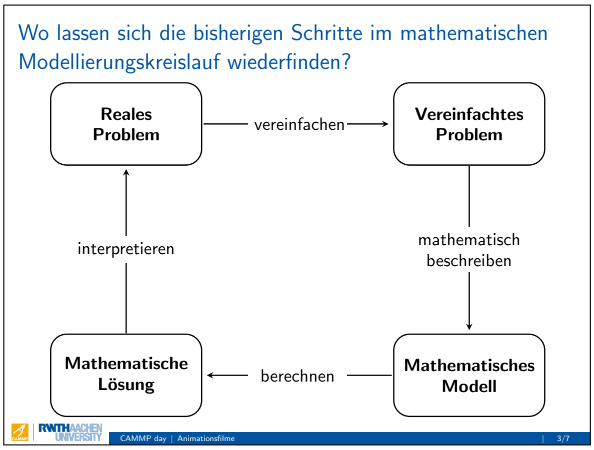
Aufgabe 2 | Interpretation der hermitesche Interpolation

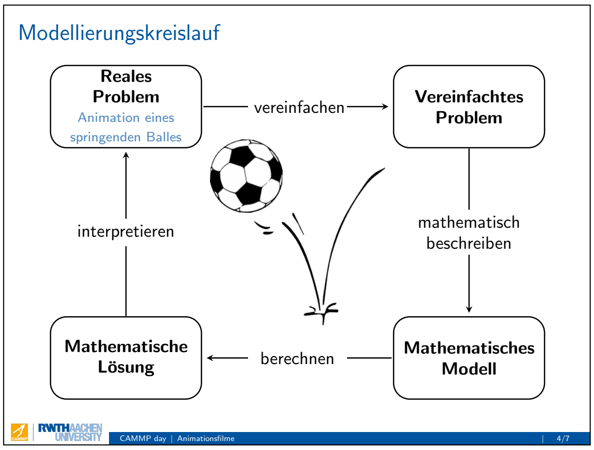
a) Die Animation stellt die Bewegung des springenden Balles sehr gut dar, da sie auch die Physik im Hochpunkt und Tiefpunkt berücksichtigt. Der Ball ruht an einem Hochpunkt kurz in der Luft während er seine Richtung wechselt. Auf dem Boden hingegen wechselt er auf Grund des Widerstandes vom Boden/Pult sehr viel schneller die Richtung und wird schneller beschleunigt.

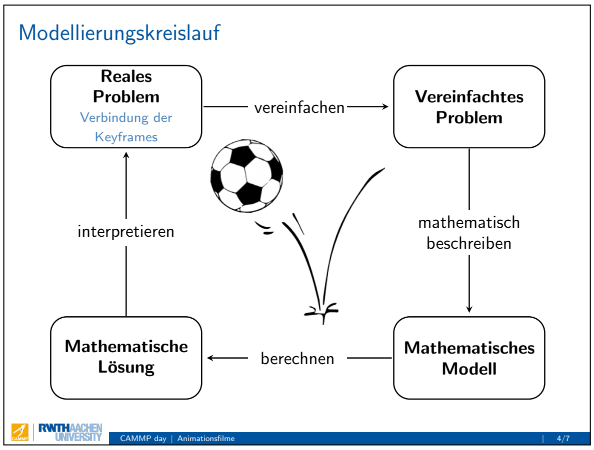
b) Zusätzlich müsste noch die Formveränderung berücksichtigt werden, da der Ball beim Aufprallen leicht oval wird. Darüber hinaus könnte noch eine Farbveränderung betrachtet werden, da von irgendwo immer Licht einfällt und somit eine Stelle am Ball heller sein muss als die anderen. Außerdem führt das dazu, dass der Ball einen Schatten wirft, welcher in einer perfekten Animation ebenfalls berücksichtigt werden müsste.

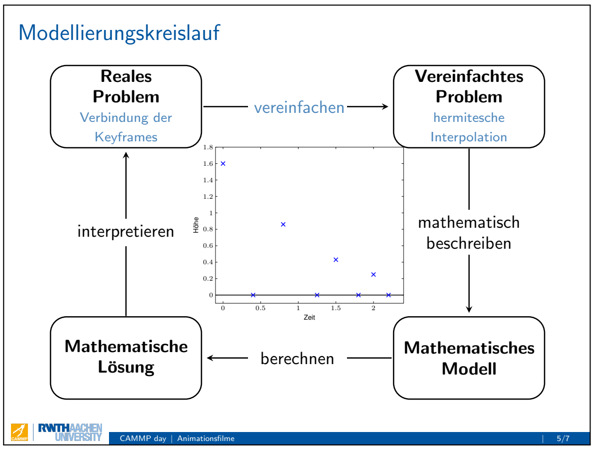
C.14. Dritter Zwischenvortrag

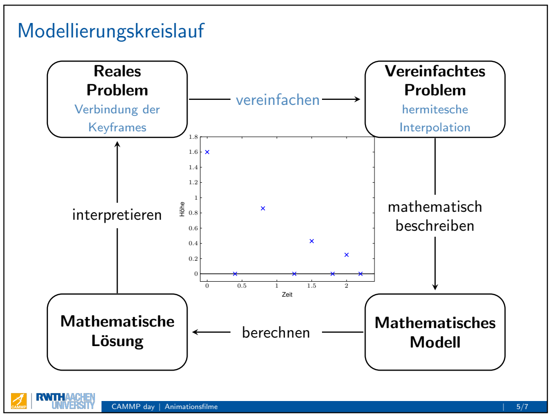


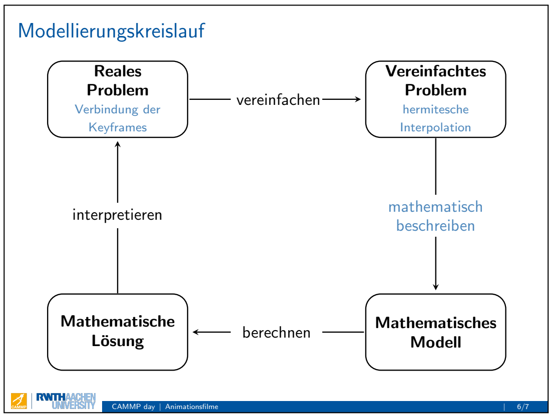


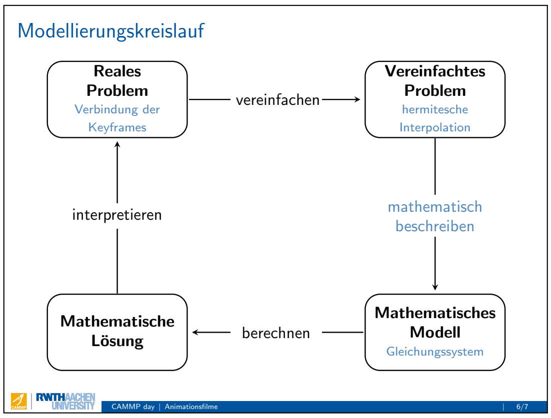


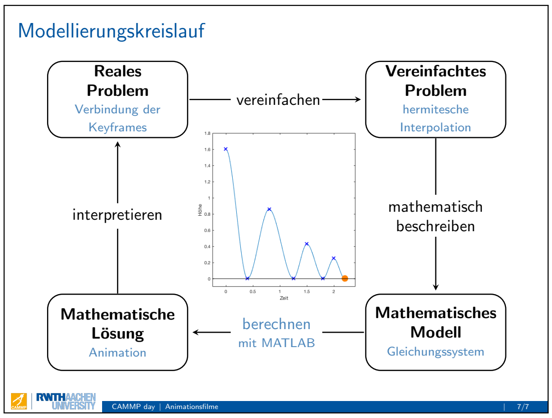


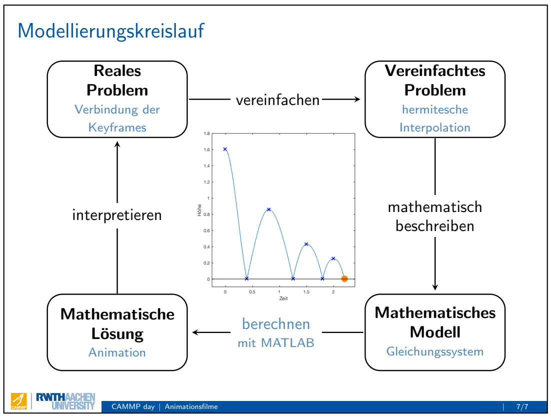


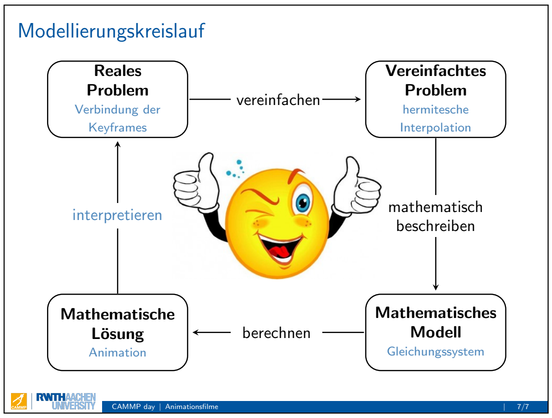

Modellierungskreislauf
Reales Problem
Verbindung der Keyframes
vereinfachen
Vereinfachtes Problem
hermitesche Interpolation
interpretieren
mathematisch beschreiben
Mathematische Lösung
berechnen
Mathematisches Modell
CAMMP day | Animationsfilme
5/7


Modellierungskreislauf
Reales Problem
Verbindung der Keyframes
vereinfachen
Vereinfachtes Problem
hermitesche Interpolation
interpretieren
mathematisch beschreiben
Mathematische Lösung
berechnen
Mathematisches Modell
CAMMP day | Animationsfilme
6/7


Modellierungskreislauf
Reales Problem
Verbindung der Keyframes
vereinfachen
Vereinfachtes Problem
hermitesche Interpolation
interpretieren
mathematisch beschreiben
Mathematische Lösung
berechnen
Mathematisches Modell
Gleichungssystem
CAMMP day | Animationsfilme
6/7


Modellierungskreislauf
Reales Problem
Verbindung der Keyframes
vereinfachen
Vereinfachtes Problem
hermitesche Interpolation
interpretieren
mathematisch beschreiben
Mathematische Lösung
Animation
berechnen
mit MATLAB
Mathematisches Modell
Gleichungssystem
CAMMP day | Animationsfilme
7/7


Modellierungskreislauf
Reales Problem
Verbindung der Keyframes
vereinfachen
Vereinfachtes Problem
hermitesche Interpolation
interpretieren
mathematisch beschreiben
Mathematische Lösung
Animation
berechnen
mit MATLAB
Mathematisches Modell
Gleichungssystem
CAMMP day | Animationsfilme
7/7


Modellierungskreislauf
Reales Problem
Verbindung der Keyframes
vereinfachen
Vereinfachtes Problem
hermitesche Interpolation
interpretieren
mathematisch beschreiben
Mathematische Lösung
Animation
berechnen
Mathematisches Modell
Gleichungssystem
CAMMP day | Animationsfilme
7/7

C.15. Notizen zum dritten Zwischenvortrag

CAMMP day
Animationsfilme

Hinweise zum dritten Zwischenvortrag

Sage den SuS, die mit dem ersten Blatt nicht fertig geworden sind, dass sie die Lösung von der Folie abschreiben können, wenn sie wollen, damit sie auch einmal die Animation anschauen können und den vollständigen Code haben. Lassen diesen SuS gegebenenfalls dafür Zeit bevor du mit dem Vortrag anfängst.

Lasse alle SuS ihre Laptops zuklappen, damit ihre Aufmerksamkeit nach Vorne gerichtet ist.

Folie 1 | Eröffnungsfolie
Betrachten wir nun das dritte verbesserte mathematische Modell mit der hermiteschen Interpolation.

Folie 2+3 | Wo lassen sich die bisherigen Schritte im mathematischen Modellierungskreislauf wiederfinden?
Hier sollen Ideen von den SuS gesammelt werden, welche bisher erarbeiteten Schritte sich wo im mathematischen Modellierungskreislauf wiederfinden lassen.
Damit die SuS noch einmal den Modellierungskreislauf vor Augen haben, wird auf der nächsten Folie dieser ohne weitere Hinweise eingeblendet.

Folie 4 | Modellierungskreislauf
Das reale Problem bleibt weiterhin die Animation eines springenden Balles.

Folie 5 | Modellierungskreislauf
Das vereinfachte Problem ist, wie im Einführungsvortrag gesagt wurde, die Interpolation, also die Verbindung der Keyframes auf eine bestimmt Art und Weise. Hier in diesem Fall ist es die hermitesche Interpolation.

Folie 6 | Modellierungskreislauf
Im ersten mathematischen Modell habt ihr die hermitesche Interpolation durch ein Gleichungssystem beschrieben.

Folie 7 | Modellierungskreislauf
Und MATLAB hat mit Hilfe der eingegeben Formeln eine Animation erstellt, welche für unsere Zwecke zunächst ein gutes mathematisches Modell darstellt, wenn alle Ableitungen gleich Null gesetzt werden. Wir erhalten sogar ein sehr gutes mathematisches Modell, wenn die richtigen Werte für die Ableitungen angegeben werden.

1/1

C.16. Arbeitsblatt 4

CAMMP day

Animationsfilme

3. Modellverbesserung

- Arbeitsblatt 4 -

Eine besondere Form der Splines wird in der TCB-Methode verwendet. Dabei werden immer drei Punkte $P_{i-1}(t_{i-1}|h_{i-1})$, $P_i(t_i|h_i)$ und $P_{i+1}(t_{i+1}|h_{i+1})$ betrachtet, die durch Polynome miteinander verbunden werden. Das komplette mathematische Modell wird hier nicht erarbeitet, vielmehr wird der Einfluss von drei zentralen Parametern s, c und b untersucht.

Aufgabe 1 | TCB-Methode

Die Veränderung der einzelnen Parameter s, c und b bewirkt etwas anderes. Öffne das MATLAB-Skript *TCB-GUI.m* und untersuche, welche Auswirkungen die Parameter s, c und b auf die Funktion haben, indem du auf den Button drückst und im neuen Fenster Werte für s, c und b eingibst. Beachte dabei, dass du für die Parameter nur Werte zwischen -1 und 1 eingeben darfst:

- s Tension (Spannung):

  ____

  ____

  ____

- c Continuity (Stetigkeit):

  ____

  ____

  ____

- b Bias (Neigung):

  ____

  ____

  ____

Aufgabe 2 | Kurvige Straße

In dieser Aufgabe wirst du erneut mit Synfig arbeiten und selbst eine Animation erstellen. Ziel ist es, den Ball die Straße entlang rollen zu lassen.

- Öffne in *Synfig* die gesuchte Datei über *Datei* $\rightarrow$ *Öffnen* $\rightarrow$ *Schreibtisch* $\rightarrow$ *Synfig* $\rightarrow$ *kurvige_Strasse* $\rightarrow$ *Synfig_kurvige_Strasse_SuS*.
- Diesmal wird die Animation 120 Bilder mit 24 Bilder pro Sekunde lang sein. Das entspricht 5s.
- Wähle diesmal als **Interpolationsmethode** die TCB-Methode aus. Klicke dafür am unteren Rand des großen mittleren Feldes auf Fließend und wähle *TCB* aus.

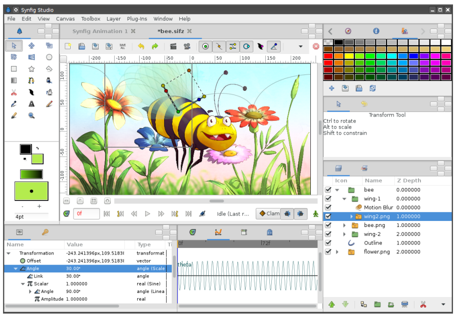
- Gehe nun in den nächsten Schritten, wie bei der geraden Straße von Aufgabenblatt 1 vor, um die Animation zu erstellen. Beachte, dass du dir Streckenpunkte überlegen musst, an denen der Ball (das Auto) vorbeirollen soll. Überlege dir dazu auch entsprechend sinnvolle Zeitpunkte, so dass die Keyframes erstellt werden können.
- Wähle zum Erstellen der Keyframes unten rechts im Ebenen-Menü die Ebene *Ball* aus, damit du den Ball bewegen kannst.
- Ist deine Animation fertiggestellt, kannst du sie dir anschauen, indem du auf den ⏮-Button und anschließend auf den ▷-Button klickst.

Aufgabe 3 | Autobahnkreuz

- Öffne nun in *Synfig* eine weitere Datei über *Datei* → *Öffnen* → *Schreibtisch* → *Synfig* → *Autobahnkreuz* → *Synfig_Autobahnkreuz_SuS*, um eine weitere Animation zu erstellen. Auch diese wird, wie die vorherige 5s lang sein.
- Wähle als **Interpolationsmethode** erneut die TCB-Methode aus.
- Gehe in den nächsten Schritten, wie bei der vorherigen Aufgabe vor, um die Animation zu erstellen.

Aufgabe 4 | Your turn!

Nun bist du an der Reihe selbstständig eine Animation zu erstellen.



a) Überlege eine Bewegung oder Situation, die du gerne animieren würdest. Beachte dabei, dass sie nicht zu komplex ist, da du alles selbst am Computer zeichnen musst, um die Keyframes zu erstellen.

Falls du keine Ideen hast, kannst du versuchen eins der folgenden Beispiele zu animieren:

- springender Ball
- winkendes Strichmännchen
- fahrendes Auto

b) Erstelle die Animation bei Synfig, indem du vorgehst, wie in den bisherigen Erstellungen von Animationen. Du kannst zunächst eine vereinfachte Situation betrachten, bei der du bspw. Verformungen oder Farbveränderungen nicht berücksichtigst.

c) Ändere deine Animation so ab, dass sie realistischer ist, indem du beispielsweise Verformungen oder Farbänderungen berücksichtigst.

C.17. Zusatzmaterial zu Arbeitsblatt 4

C.17.1. Synfig-Anleitung

CAMMP day

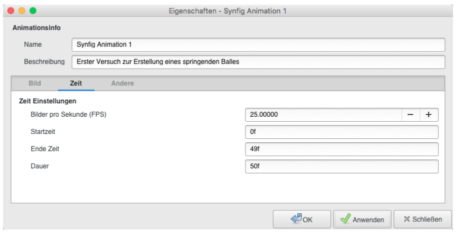
Animationsfilme

Synfig - Anleitung

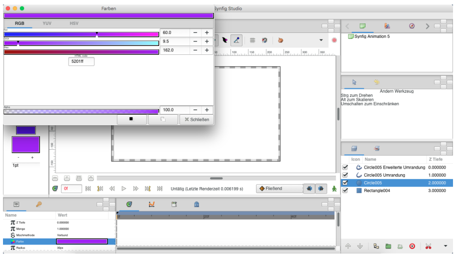
Synfig ist ein Programm, das benutzt werden kann, um Animationen zu erstellen, welche verschiedene Interpolationsweisen benötigen. Ein schöner Vorteil dieser Software ist, dass sie kostenlos für jeden zugänglich ist.

Vorbereitungen

Um anzugeben, wie lange die Animation dauern und wie sie heißen soll, klicke im Fenster in der Mitte auf das Quadrat, das oben links erscheint, wo die beiden Lineale aufeinander treffen. Klicke unter *Animation* auf *Einstellungen*. Gib der Animation, die du erstellen willst, einen Namen und fertige eine kurze Beschreibung an. Gehe danach im Feld unter der Beschreibung auf den Reiter *Zeit* und bestimme die Anzahl der Bilder pro Sekunde (FPS) und die Dauer der Animation (bspw. 2 Sekunden: Eingabe bei Ende Zeit von 2 s). Gibt man 2 s ein, so rechnet Synfig die Zeiteingabe zu 50 Frames um, wenn 25 Bilder pro Sekunde erstellt werden. Klicke anschließend auf *Anwenden*.



Gegenstände darstellen



Zunächst musst du dir überlegen, welche Farbe dein Hintergrund haben soll: Wähle dafür in der Toolbox links das *Rechteck-Tool* aus und erstelle damit einen rechteckigen Hintergrund in der bereits zu sehenden karierten Fläche. Ebenso lassen sich anschließend andere Formen erstellen.
Die Farbe lässt sich ändern, indem du unten rechts den Gegenstand auswählst, dessen Farbe du verändern möchtest. Unten links erscheint schließlich eine Reihe an Angaben zu dem Gegenstand, wozu auch die Farbe gehört. Durch einen Doppelklick öffnet sich ein weiteres Fenster, in welchem du eine gewünschte Farbe mischen kannst. Unten rechts im ursprünglichen großen Fenster siehst du immer, an welchem Objekt du gerade arbeitest.
Bei vielen Animationen ist es notwendig, dass sich der Gegenstand im Laufe der Zeit verändert. Beim springenden Ball bspw. wird die untere Seite abgeflacht, wenn er auf dem Boden ankommt. Um Verformungen dieser Art zu ermöglichen, muss der gewünschte Gegenstand links in der Toolbox erstmal nur ausgewählt werden. Rechts erscheint in der Mitte ein Fenster mit Einstellungen zu dem Gegenstand. Dort müssen folgende Einstellungen gewählt werden:

- *Kreisebene* anklicken
- *Umrandung* anklicken
- *erweiterte Umrandung* anklicken
- Häkchen setzen bei *Ursprünge verbinden* und *Pfadursprung zentriert* (unten in dem Fenster)
  Ursprünge verbinden ☑
  Pfadursprung zentriert ☑

1/2

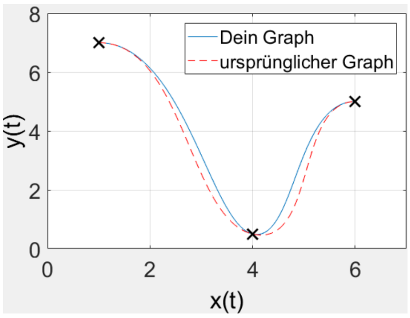
C.18. Musterlösung von Arbeitsblatt 4

CAMMP day

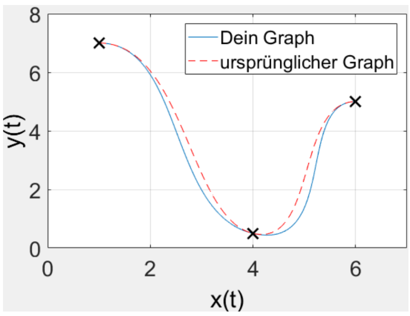
Animationsfilme

Musterlösung zur TCB - Methode

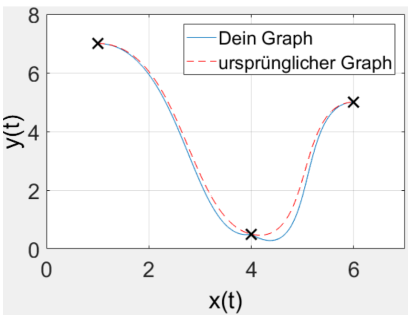
- s Tension (Spannung):
  s bestimmt den Grad des Stauchens, so bekommt die Kurve einen breiteren Tiefpunkt für negative Zahlen und einen immer spitzeren für positive Zahlen (siehe Bild (a) und (b)).
  Dies lässt sich auch als auseinanderziehen bzw. zusammenschieben entlang der x-Achse interpretieren.
- c Continuity (Stetigkeit):
  c erzeugt Knicke in der Kurve. Wählt man $c > 0$, so entsteht ein Ansatz eines Knickes von einem Dach, wie er in Bild (c) unten zu sehen ist. Wird $c < 0$ gewählt, so entsteht ein V ähnlicher Knick (siehe Bild (d)).
  Dies lässt sich auch als hochziehen bzw. herunter schieben entlang der y-Achse verstehen.
- b Bias (Neigung):
  b verzerrt die Kurve entweder nach rechts oder links, das heißt, dass der Tiefpunkt nicht bei Punkt x_i ist, sondern nach rechts oder links verschoben wird. Ist $b > 0$, ist der Tiefpunkt weiter rechts (siehe Bild (e)), und bei $b < 0$ weiter links (siehe Bild (f)).



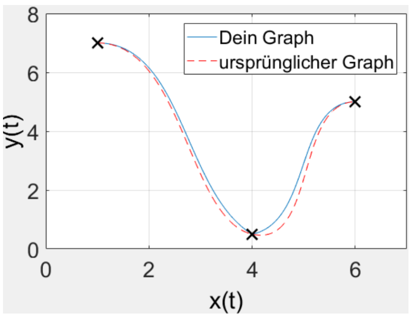
(a) Einfluss von $s = 1$



(b) Einfluss von $s = -1$

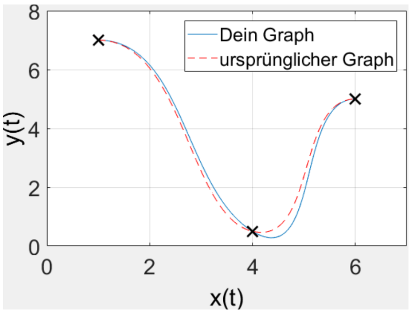


(c) Einfluss von $c = 1$

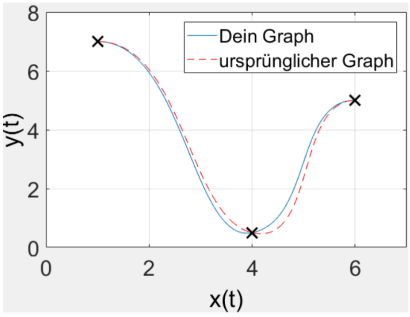


(d) Einfluss von $c = -1$

1/2



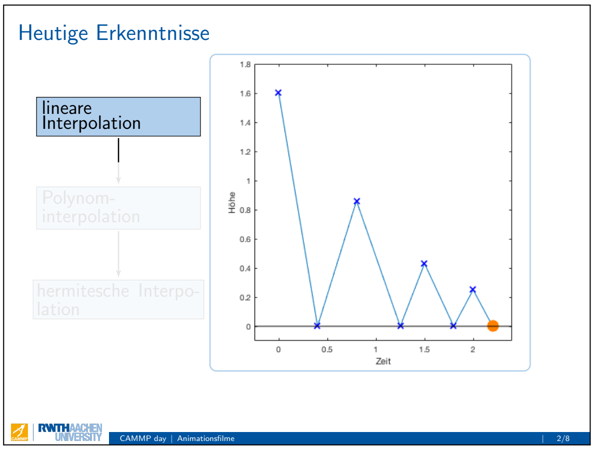
(e) Einfluss von $b = 1$

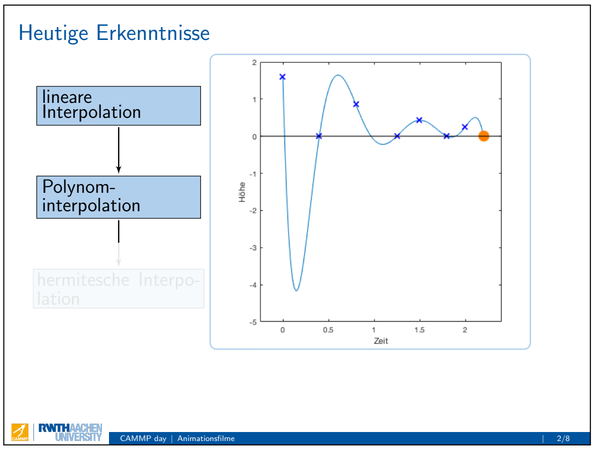


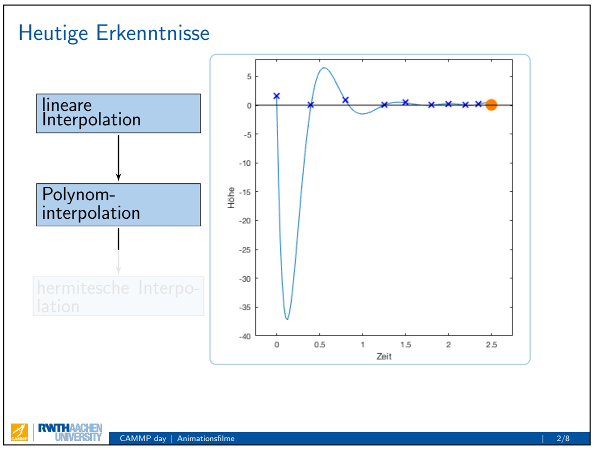
(f) Einfluss von $b = -1$

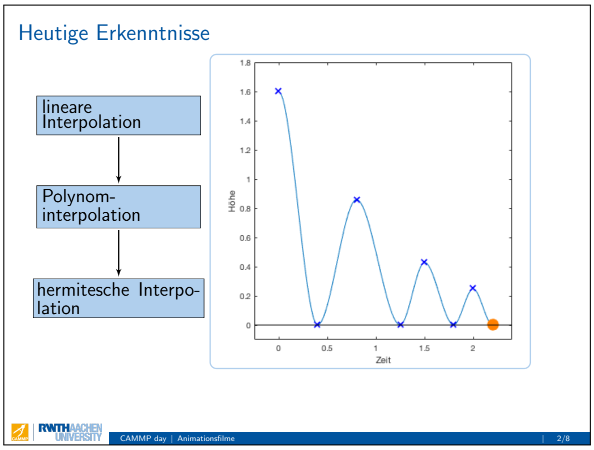
2/2

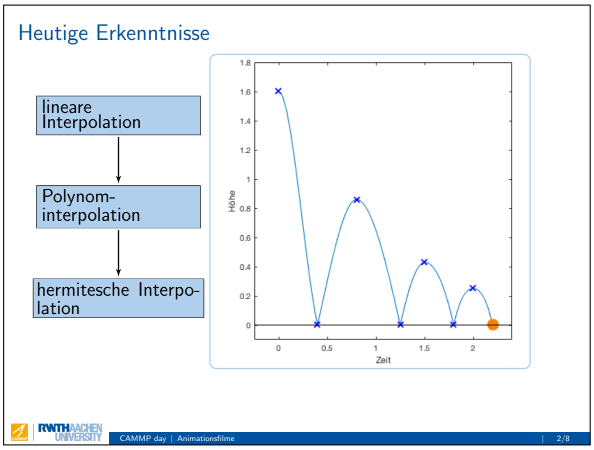
C.19. Abschlussdiskussion











Heutige Erkenntnisse

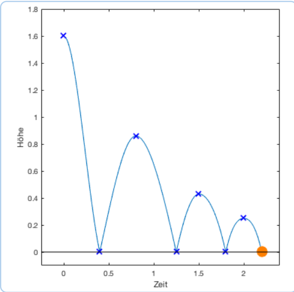
lineare Interpolation

↓

Polynom-interpolation

↓

hermitesche Interpolation



Wie sollte das mathematische Modell verbessert werden?

Wie sollte das mathematische Modell verbessert werden?

- Farbveränderung
- Verformungen
- Tonkulisse
- ...

Warum setzt man sich mit Interpolationen auseinander?

Warum setzt man sich mit Interpolationen auseinander?

Zur optimalen Erstellung eines Animationsfilms!

- Anpassung der animierten Bewegungen an die gewünschten
- Minimierung der Dauer der Erstellung
- Minimierung der Kosten
- Maximierung der animierten Bewegungsmöglichkeiten
- ...

Was sind die Herausforderungen bei der Erstellung von Animationsfilmen?

Was sind die Herausforderungen bei der Erstellung von Animationsfilmen?

- Komplexität der Figuren
- Realitätsnähe
- Farbtonveränderungen
- ...

C.20. Notizen zum ersten Zwischenvortrag

CAMMP day
Animationsfilme

CAMMP | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Hinweise zur Abschlussdiskussion

Folie 1 | Eröffnungsfolie

Nachdem ihr so viel selbstständig gearbeitet habt, fassen wir den Tag noch einmal zusammen und schauen uns an, was ihr geschafft habt.

Folie 2 | Heutige Erkenntnisse
Ihr habt verschiedene Interpolationsarten kennengelernt und gesehen, dass die verschiedenen Arten zu verschiedenen Bewegungen gut passen.
Bei der Polynominterpolation konnte die erstellte Funktion verbessert werden, indem Punkte weggenommen wurden, allerdings wurde die Bewegung nie die eines springenden Balles.
Durch die hermitesche Interpolation wurde die gewünschte Bewegung animiert, jedoch erst, bei der Verbesserung durch die Veränderung der Steigung an den Tiefpunkten.

Im Anschluss habt ihr selbst bei Synfig Animationen erstellt und erkannt, dass noch weitere Faktoren, Veränderungen bei der Erstellung berücksichtigt werden müssen.

Folie 3+4 | Wie sollte das mathematische Modell verbessert werden?
Es müssen zusätzlich zu der Art der Bewegung noch andere Faktoren berücksichtigt werden, wie die Farbveränderung bspw. bei der Einstrahlung von der Sonne über den gesamten Tag gesehen auf einen Gegenstand. Manchmal muss die Verformung, bspw. beim springenden Ball, berücksichtigt werden. Zum Schluss damit man aus unseren Animationen Animationsfilme machen kann, muss noch ein Ton hinterlegt werden. Bei jeder weiteren Verbesserung wird so das erstellte mathematische Modell verbessert.

Folie 5+6 | Warum setzt man sich mit Interpolation auseinander?
Zur optimalen Erstellung eines Animationsfilms in dem die Charaktere möglichst realitätsnahe Bewegungen vollführen und auch nicht mehr von realen Personen zu unterscheiden sind. Zusätzlich minimiert man durch die Interpolation die Erstellungsdauer von Animationsfilmen und dadurch auch die Kosten. Da man verschiedene Interpolationsmöglichkeiten hat, ist die Vielfalt an Bewegungsarten groß und kann genau an die gewünschte Bewegung angepasst werden.

Folie 7+8 | Was sind die Herausforderungen bei der Erstellung von Animationsfilmen?
Die Bewegungen von Figuren, gerade wenn man sie so darstellen möchte, dass möglichst wenig Unterschied zu realen Schauspielern gesehen werden kann, sind sehr komplex. So sind auch hier die Farbtonveränderungen sehr komplex darzustellen, da die korrekte Lichteinstrahlung berücksichtigt werden muss.

1/1

D. Code der SuS

D.1. Code von Aufgabenblatt 1

```
% Zeitpunkte der Keyframes
t=[0 0.4 0.8 1.25 1.5 1.8 2 2.2];
% Hoehen der Keyframes
h=[1.6 0 0.86 0 0.43 0 0.25 0];

%% Blatt 1 - Aufagbe 1
hp = @(i, k, tp) NaN;

check_linear(t,h,hp);
```

D.2. Code von Aufgabenblatt 2

```
%% 1. Modellverbesserung
% Blatt 2 - Aufgabe 1
Gleichungssystem1 = @(c,d,e,f,g,l,m,n) [NaN
                                         NaN
                                         NaN
                                         NaN
                                         NaN
                                         NaN
                                         NaN
                                         NaN];

Funktion1 = @(X) Gleichungssystem1(X(1),X(2),X(3),X(4),X(5),
X(6),X(7),X(8));
Startpunkt1 = [0 0 0 0 0 0 0 0];
t1 = fsolve(Funktion1,Startpunkt1);

check_polynom(t,h,t1);

%% 1. Modellverbesserung
% Blatt 2 - Aufgabe 2
t = [0 0.4 0.8 1.25 1.5 1.8 2 2.2 2.35 2.5];
h = [1.6 0 0.86 0 0.43 0 0.25 0 0.15 0];
Gleichungssystem2 = @(a,b,c,d,e,f,g,l,m,n) [NaN
                                             NaN
                                             NaN
                                             NaN
                                             NaN
                                             NaN
                                             NaN
                                             NaN
                                             NaN
                                             NaN];

Funktion2 = @(X) Gleichungssystem2(X(1),X(2),X(3),X(4),X(5),X(6),
```

```
X(7),X(8),X(9),X(10));
Startpunkt2 = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
t2 = fsolve(Funktion2,Startpunkt2);

check_polynom_neu(t, h, t2);
```

D.3. Code von Aufgabenblatt 3

```
%% 2. Modellverbesserung
% Blatt 3 - Aufgabe 1
t=[0 0.4 0.8 1.25 1.5 1.8 2 2.2];
h=[1.6 0 0.86 0 0.43 0 0.25 0];

df1 = [0 0 0 0 0 0 0 0];
df2 = [NaN NaN NaN NaN NaN NaN NaN NaN];
for i = 1:length(t)-1
        if (mod(i,2)==1)
                df_gerade = NaN;
        else
                df_gerade = NaN;
        end
        for j = 2:2:length(t)
                df2(j) = df_gerade;
        end
        Gleichungssystem3 = @(a,b,c,d) [NaN
                                         NaN
                                         NaN
                                         NaN];
        Funktion3 = @(X) Gleichungssystem3(X(1),X(2),X(3),X(4));
        Startpunkt3 = [0 0 0 0];
        t3(i,:) = fsolve(Funktion3,Startpunkt3);
end


check_LGS(t,h,df1,t3);
check_Splines(t, h, t3);
```

E. Evaluation

E.1. Evaluationsbogen

CAMMP day
Animationsfilme

CAMMP | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Evaluation

Freier CAMMP day – 24. Juli 2017

Es besteht immer die Möglichkeit unsere Programme zu verbessern und wir würden gerne deine Meinung erfahren. Vielen Dank für deine Rückmeldung.

1. Persönliche Angaben

Jahrgangsstufe: _____ Geschlecht: ○ weiblich ○ männlich

2. Angaben zur Schullaufbahn

Leistungskurse: ______________________________

Welche Schulform besuchst du?

○ Hauptschule ○ Realschule ○ Gesamtschule ○ Gymnasium
○ Andere Schulform: ______________

3. Kursangebot

Wie hast du von den Kursangeboten erfahren?
Bitte kreuze jede zutreffende Aussage an. Mehrfachnennungen sind möglich.

□ Infoveranstaltung in der Schule □ Eltern □ Flyer / Plakate / Zeitungen
□ Lehrerinnen und Lehrer □ Freunde □ Internet
□ Sonstiges: ______________

Was waren deine Gründe für deine Anmeldung an diesem Kurs?
Bitte kreuze jede zutreffende Aussage an. Mehrfachnennungen sind möglich.

□ Weil ich das machten wollte und mich selbst dafür entschieden habe.
□ Weil Lehrerinnen und Lehrer meiner Schule mir das empfohlen haben.
□ Weil meine Eltern das wollen.
□ Weil Mitschüler / Freunde diesen oder einen anderen Kurs besucht haben.
□ Ich habe mich aus anderen Gründen angemeldet: ______________

4. Bewertung des Workshops

	Trifft gar nicht zu (--)	Trifft eher nicht zu (-)	Trifft zum Teil zu (+)	Trifft voll zu (++)
Mich hat das Thema Animationsfilme interessiert.	○	○	○	○
Ich habe verstanden, was Interpolation bedeutet.	○	○	○	○
Ich habe verstanden, welche Unterschiede es bei den Interpolationsarten gibt.	○	○	○	○
Ich hatte zwischen Aufgabenblättern nichts zu tun (Leerlauf).	○	○	○	○
Durch den Workshop habe ich mathematisches Modellieren besser begriffen.	○	○	○	○
Der Vortrag über Modellierung war hilfreich.	○	○	○	○

1/3

	Trifft gar nicht zu (--)	Trifft eher nicht zu (-)	Trifft zum Teil zu (+)	Trifft voll zu (++)
Der einführende Kurzfilm war hilfreich.	○	○	○	○
Die Einführung in MATLAB war hilfreich.	○	○	○	○
Der Umgang mit MATLAB fiel mir schwer.	○	○	○	○
Die Aufgaben waren zu einfach.	○	○	○	○
Die Aufgaben waren zu schwierig.	○	○	○	○
Die Hilfekarten waren hilfreich.	○	○	○	○

5. Verbesserungsideen

Was würdest du am Workshop verändern bzw. verbessern wollen?

6. Weiterführende Fragen

Wenn du über deine Erfahrungen mit diesem Kurs nachdenkst, wie sehr treffen die folgenden Aussagen auf dich zu?

	Trifft gar nicht zu (--)	Trifft eher nicht zu (-)	Trifft zum Teil zu (+)	Trifft voll zu (++)
Durch diesen Kurs hat sich mein Interesse an den behandelten Themen erhöht.	○	○	○	○
Der Kurs hat Einfluss auf meine beruflichen Vorstellungen gehabt.	○	○	○	○
Der Kurs hat mir Einblicke in alltagspraktische oder betriebliche Anwendungen ermöglicht.	○	○	○	○
Durch den Kurs habe ich interessante Berufs- und Studienmöglichkeiten kennen gelernt.	○	○	○	○
Ich habe in diesem Kurs viel Neues gelernt.	○	○	○	○
Die Themen dieses Kurses haben mir Einblicke in die gesellschaftliche Bedeutung von MINT (Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften und Technik) ermöglicht.	○	○	○	○
Ich würde wieder einen Kurs des zdi-Netzwerkes besuchen.	○	○	○	○
Ich würde auch anderen Schülern die Teilnahme an einem Kurs empfehlen.	○	○	○	○
Die Betreuer haben das selbstständige Arbeiten gefördert.	○	○	○	○
Die Dozenten haben die Inhalte plausibel und klar dargestellt.	○	○	○	○
Die Anleitungen zu den Aufgaben waren zufriedenstellend und gut verständlich.	○	○	○	○
Ich kann mir gut vorstellen später ein Studium oder eine Ausbildung im Bereich Technik oder Naturwissenschaften aufzunehmen.	○	○	○	○

Hat dir etwas an dem Kurs absolut **nicht** gefallen?

◯ Nein

◯ Ja, und zwar: ____________________

Hat dir etwas an diesem Kurs besonders **gut** gefallen?

◯ Nein

◯ Ja, und zwar: ____________________

Hättest du gerne noch etwas anderes gesehen oder erfahren?

◯ Nein

◯ Ja, und zwar: ____________________

7. Lernzuwachs

Was hast du für dich persönlich durch die Teilnahme am Workshop gelernt?

____

____

____

____

8. Abschließende Bewertung

Ich gebe dem CAMMP day die Schulnote: ____________________

◯ 1 (sehr gut) ◯ 2 (gut) ◯ 3 (befriedigend) ◯ 4 (ausreichend) ◯ 5 (mangelhaft) ◯ 6 (ungenügend)

Ich gebe den Betreuern die Schulnote:

◯ 1 (sehr gut) ◯ 2 (gut) ◯ 3 (befriedigend) ◯ 4 (ausreichend) ◯ 5 (mangelhaft) ◯ 6 (ungenügend)

Abschließender persönlicher Kommentar (z.B. Lob, Kritik, Verbesserungsvorschläge):

E.2. Evaluationsergebnisse der ersten Durchführung

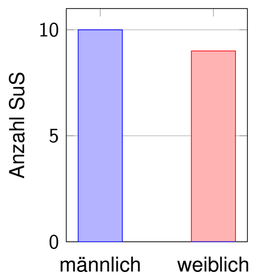
CAMMP Day

Evaluation

Stiftisches Gymnasium Düren
21. Juni 2017

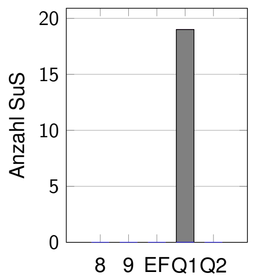
1 Persönliche Angaben

1.1 Geschlecht



m: 10 w: 9

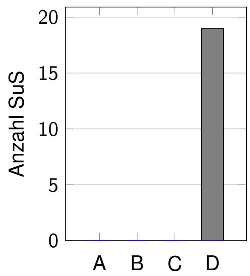
1.2 Jahrgangsstufe



8: 0 9: 0 EF: 0 Q1: 19 Q2: 0

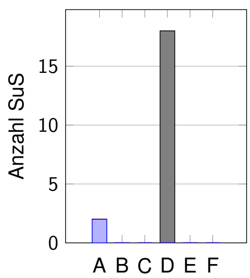
2 Angaben zur Schullaufbahn

2.1 Welche Schulform besuchst du?



Hauptschule: 0
Realschule: 0
Gesamtschule: 0
Gymnasium: 19

2.2 Wie hast du von den Kursangeboten erfahren?

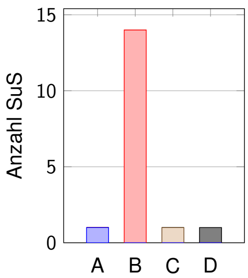


Infoveranstaltung in der Schule: 2
Eltern: 0
Flyer/Plakate/Zeitungen: 0

1/10

Lehrerinnen und Lehrer: 18
Freunde: 0
Internet: 0

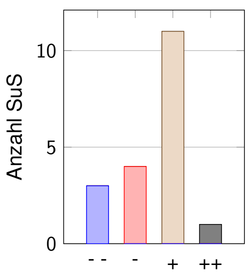
2.3 Was waren deine Gründe für deine Anmeldung an diesem Kurs?



Weil ich das machen wollte und mich selbst dafür entschieden habe: 1
Weil Lehrerinnen und Lehrer meiner Schule mir das empfohlen haben: 14
Weil meine Eltern das wollten: 1
Weil Mitschüeler//Freunde diesen oder einen anderen Kurs besucht haben: 1

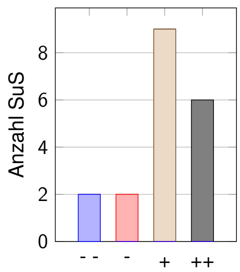
3 Bewertung des Workshops

3.1 Mich hat das Thema Animationsfilme interessiert.



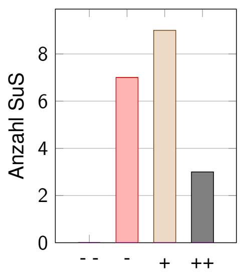
- -: 3 -: 4 +: 11 ++: 1

3.2 Ich habe verstanden, was Interpolation bedeutet.



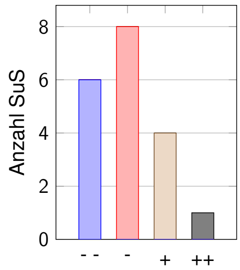
- -: 2 -: 2 +: 9 ++: 6

3.3 Ich habe verstanden, welche Unterschiede es bei den Interpolationsarten gibt.



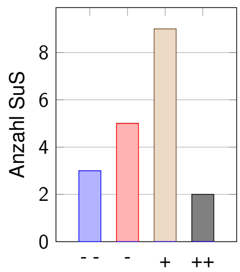
- -: 0 -: 7 +: 9 ++: 3

3.4 Ich hatte zwischen Aufgabenblättern nichts zu tun. (Leerlauf)



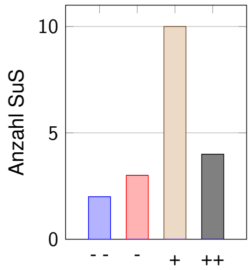
- -: 6 -: 8 +: 4 ++: 1

3.5 Durch den Workshop habe ich mathematisches Modellieren besser begriffen.



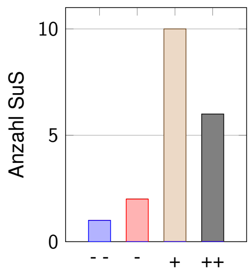
- -: 3 -: 5 +: 9 ++: 2

3.6 Der Vortrag über Modellierung war hilfreich.



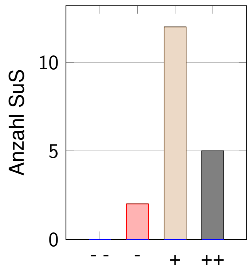
- -: 2 -: 3 +: 10 ++: 4

3.7 Der einführende Kurzfilm war hilfreich.



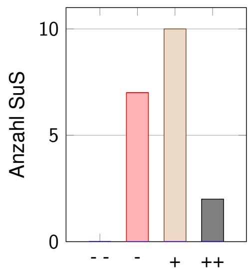
- -: 1 -: 2 +: 10 ++: 6

3.8 Die Einführung in MATLAB war hilfreich.



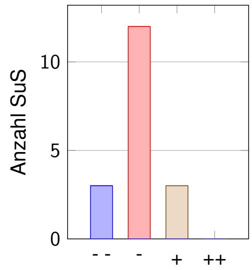
- -: 0 -: 2 +: 12 ++: 5

3.9 Der Umgang mit MATLAB fiel mir schwer.



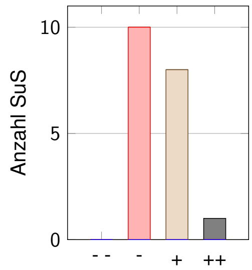
- -: 0 -: 7 +: 10 ++: 2

3.10 Die Aufgaben waren zu einfach.



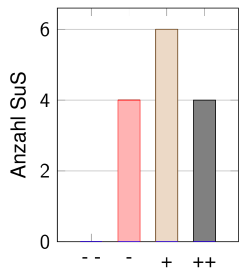
- -: 3 -: 12 +: 3 ++: 0

3.11 Die Aufgaben waren zu schwierig.



- -: 0 -: 10 +: 8 ++: 1

3.12 Die Hilfekarten waren Hilfreich.



- -: 0 -: 4 +: 6 ++: 4

4 Was würdest du am Workshop verändern bzw. verbessern wollen.

w (Jgst.: Q1): nict mehr so viel eintippen.

w (Jgst.: Q1): mehr denken, kürzere Formeln eingeben.

w (Jgst.: Q1): mehr Abwechslung.

w (Jgst.: Q1): mehr Animationsbeispiele.

w (Jgst.: Q1): interessanter.

w (Jgst.: Q1): mehrere kleine Pausen.

w (Jgst.: Q1): mehr Zeit für eigene Animationen.

w (Jgst.: Q1): spannende Gestaltung.

m (Jgst.: Q1): anderes Programm.

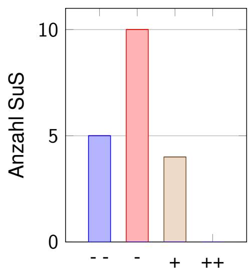
w (Jgst.: Q1): mehr erklären.

m (Jgst.: Q1): etwas lebendigere Vorträge.

m (Jgst.: Q1): bessere Einführung in die Animation.

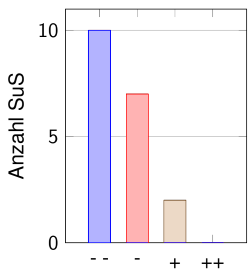
5 Weiterführende Fragen

5.1 Durch diesen Kurs hat sich mein Interesse an den behandelten Themen erhöht.



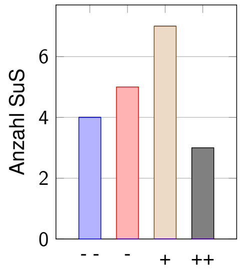
- -: 5 -: 10 +: 4 ++: 0

5.2 Der Kurs hat Einfluss auf meine beruflichen Vorstellungen gehabt



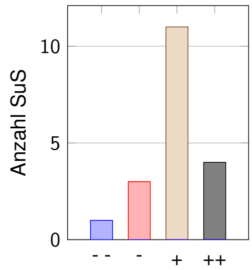
- -: 10 -: 7 +: 2 ++: 0

5.3 Der Kurs hat mir Einblicke in alltagspraktische oder betriebliche Anwendungen ermöglicht



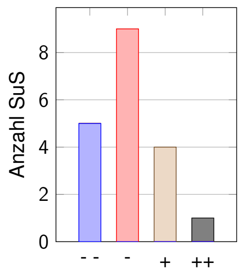
- -: 4 -: 5 +: 7 ++: 3

5.5 Ich habe in diesem Kurs viel Neues gelernt



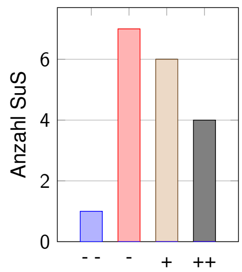
- -: 1 -: 3 +: 11 ++: 4

5.4 Durch den Kurs habe ich interessante Berufs- und Studienmöglichkeiten kennen gelernt



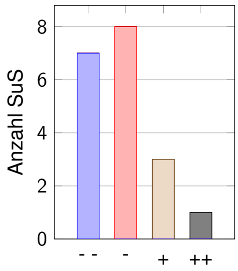
- -: 5 -: 9 +: 4 ++: 1

5.6 Die Themen dieses Kurses haben mir Einblicke in die gesellschaftliche Bedeutung von MINT ermöglicht



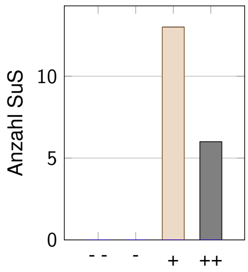
- -: 1 -: 7 +: 6 ++: 4

5.7 Ich würde wieder einen Kurs des zdi-Netzwerkes besuchen



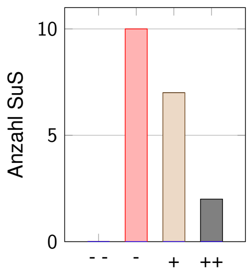
- -: 7 -: 8 +: 3 ++: 1

5.9 Die Betreuer haben das selbstständige Arbeiten gefördert



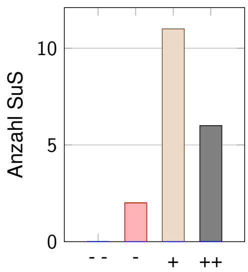
- -: 0 -: 0 +: 13 ++: 6

5.8 Ich würde auch anderen Schülern die Teilnahme an einem Kurs empfehlen



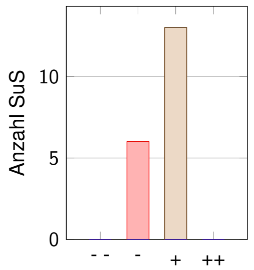
- -: 0 -: 10 +: 7 ++: 2

5.10 Die Betreuer haben die Inhalte plausibel und klar dargestellt



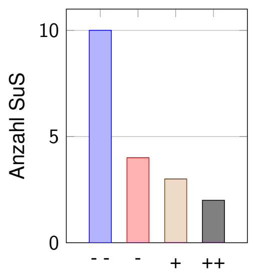
- -: 0 -: 2 +: 11 ++: 6

5.11 Die Anleitungen zu den Aufgaben waren zufriedenstellend und gut verständlich



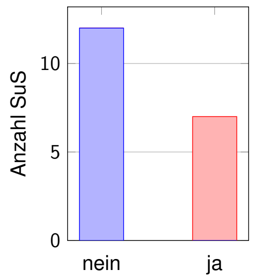
- -: 0 -: 6 +: 13 ++: 0

5.12 Ich kann mir gut vorstellen später ein Studium oder eine Ausbildung im Bereich Technik oder Naturwissenschaften aufzunehmen



- -: 10 -: 4 +: 3 ++: 2

5.13 Hat dir etwas an dem Kurs absolut nicht gefallen?



nein: 12 ja, und zwar: 7

w (Jgst.: Q1): die Länge.

w (Jgst.: Q1): nicht abwechslungsreich.

w (Jgst.: Q1): das viele Eintippen.

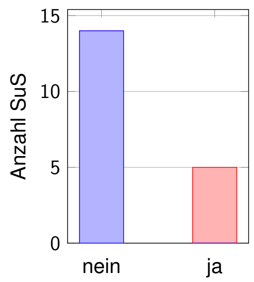
m (Jgst.: Q1): MATLAB.

m (Jgst.: Q1): das Thema.

w (Jgst.: Q1): nicht verstanden.

m (Jgst.: Q1): fehlende Einführung.

5.14 Hat dir etwas an diesem Kurs besonders gut gefallen?



nein: 14 ja, und zwar: 5

w (Jgst.: Q1): das Erfolgserlebnis.

w (Jgst.: Q1): Sendung mit der Maus.

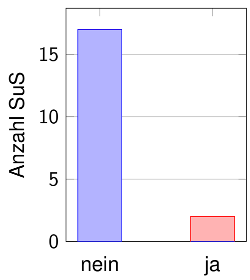
m (Jgst.: Q1): nette Betreuer.

m (Jgst.: Q1): Kennenlernen neuer Programme.

m (Jgst.: Q1): die Pause.

m (Jgst.: Q1): Relativ interessant.

5.15 Hättest du gerne noch etwas anderes gesehen oder erfahren?



nein: 17 ja, und zwar: 2

m (Jgst.: Q1): anderes Thema.

m (Jgst.: Q1): das Thema soziale Netzwerke.

6 Lernzuwachs

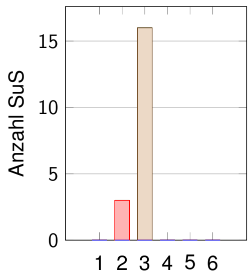
6.1 Was hast du für dich persönlich durch die Teilnahme am Workshop gelernt?

w (Jgst.: Q1): alltägliche Anwendungsbereiche für Mathematik.

w (Jgst.: Q1): wie Animationen erstellt werden.

7 Abschließende Bewertung

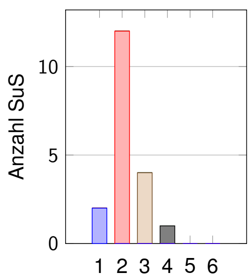
7.1 Ich gebe dem CAMMP day die Schulnote:



1: 0 2: 3 3: 16 4: 0 5: 0 6: 0

Durchschnitt: 3

7.2 Ich gebe den Betreuern die Schulnote:



1: 2 2: 12 3: 4 4: 1 5: 0 6: 0

Durchschnitt: 2

7.3 Abschließender persönlicher Kommentar

w (Jgst.: Q1): freundlicher, kompetenter Umgang.

w (Jgst.: Q1): mehr Entusiasmus.

E.3. Evaluationsergebnisse der zweiten Durchführung

CAMMP Day

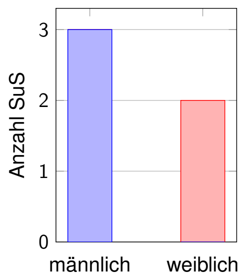
Evaluation

Freier CAMMP day

24. Juli 2017

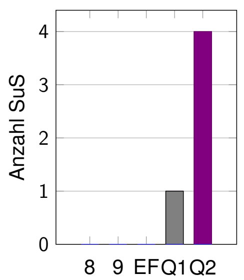
1 Persönliche Angaben

1.1 Geschlecht



m: 3 w: 2

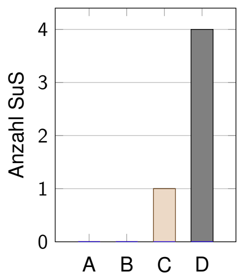
1.2 Jahrgangsstufe



8: 0 9: 0 EF: 0 Q1: 1 Q2: 4

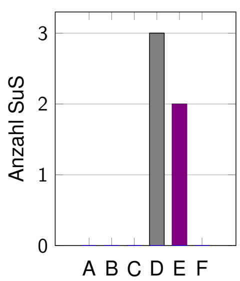
2 Angaben zur Schullaufbahn

2.1 Welche Schulform besuchst du?



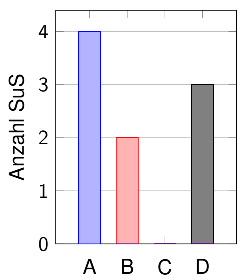
Hauptschule: 0
Realschule: 0
Gesamtschule: 1
Gymnasium: 4

2.2 Wie hast du von den Kursangeboten erfahren?



Infoveranstaltung in der Schule: 0
Eltern: 0
Flyer/Plakate/Zeitungen: 0
Lehrerinnen und Lehrer: 3
Freunde: 2
Internet: 0

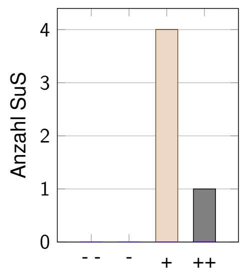
2.3 Was waren deine Gründe für deine Anmeldung an diesem Kurs?



Weil ich das machen wollte und mich selbst dafür entschieden habe: 4
Weil Lehrerinnen und Lehrer meiner Schule mir das empfohlen haben: 2
Weil meine Eltern das wollten: 0
Weil Mitschüeler//Freunde diesen oder einen anderen Kurs besucht haben: 3

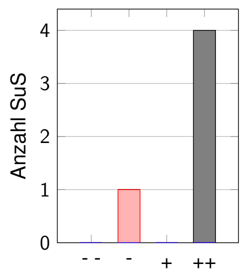
3 Bewertung des Workshops

3.1 Mich hat das Thema Animationsfilme interessiert.



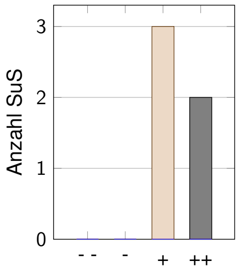
- -: 0 -: 0 +: 4 ++: 1

3.2 Ich habe verstanden, was Interpolation bedeutet.



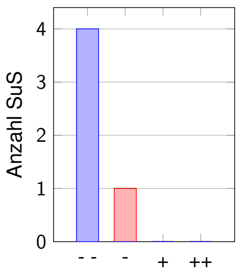
- -: 0 -: 1 +: 0 ++: 4

3.3 Ich habe verstanden, welche Unterschiede es bei den Interpolationsarten gibt.



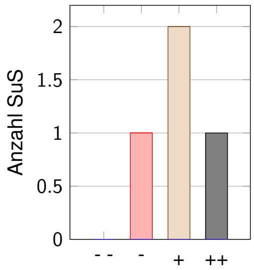
- -: 0   -: 0   +: 3   ++: 2

3.4 Ich hatte zwischen Aufgabenblättern nichts zu tun. (Leerlauf)



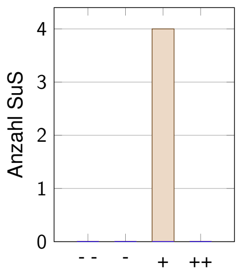
- -: 4   -: 1   +: 0   ++: 0

3.5 Durch den Workshop habe ich mathematisches Modellieren besser begriffen.



- -: 0   -: 1   +: 2   ++: 1

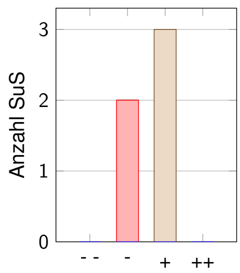
3.6 Der Vortrag über Modellierung war hilfreich.



- -: 0   -: 0   +: 4   ++: 0

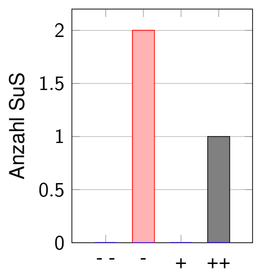
3/10

3.7 Der einführende Kurzfilm war hilfreich.



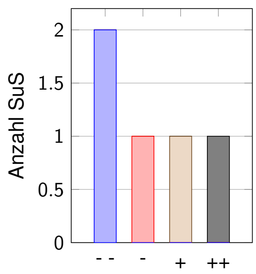
- -: 0 -: 2 +: 3 ++: 0

3.8 Die Einführung in MATLAB war hilfreich.



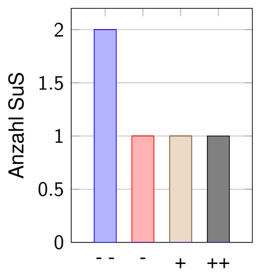
- -: 0 -: 2 +: 0 ++: 1

3.9 Der Umgang mit MATLAB fiel mir schwer.



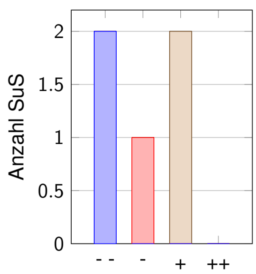
- -: 2 -: 1 +: 1 ++: 1

3.10 Die Aufgaben waren zu einfach.



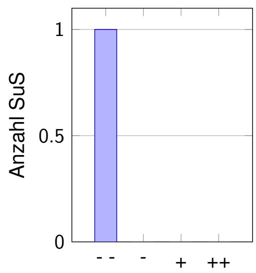
- -: 2 -: 1 +: 1 ++: 1

3.11 Die Aufgaben waren zu schwierig.



- -: 2 -: 1 +: 2 ++: 0

3.12 Die Hilfekarten waren Hilfreich.



- -: 1 -: 0 +: 0 ++: 0

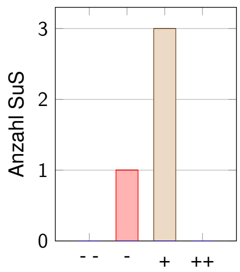
4 Was würdest du am Workshop verändern bzw. verbessern wollen.

w (Jgst.: Q1): Eventuell eine bessere / allgemeine Einführung in MATLAB geben..

m (Jgst.: Q2): weniger schreibaufwendige Aufgaben mehr denkaufwendige.

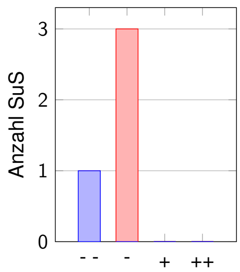
5 Weiterführende Fragen

5.1 Durch diesen Kurs hat sich mein Interesse an den behandelten Themen erhöht.



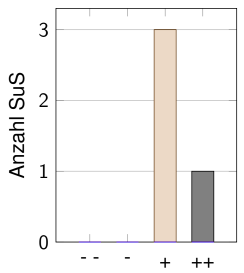
- -: 0 -: 1 +: 3 ++: 0

5.2 Der Kurs hat Einfluss auf meine beruflichen Vorstellungen gehabt



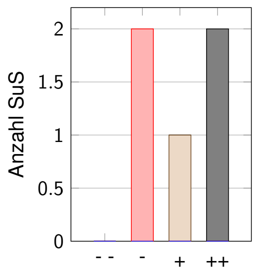
- -: 1 -: 3 +: 0 ++: 0

5.3 Der Kurs hat mir Einblicke in alltagspraktische oder betriebliche Anwendungen ermöglicht



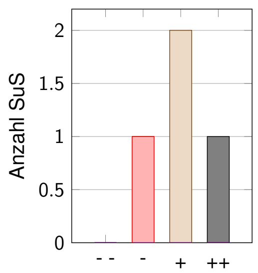
- -: 0 -: 0 +: 3 ++: 1

5.5 Ich habe in diesem Kurs viel Neues gelernt



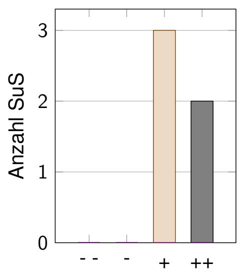
- -: 0 -: 2 +: 1 ++: 2

5.4 Durch den Kurs habe ich interessante Berufs- und Studienmöglichkeiten kennen gelernt



- -: 0 -: 1 +: 2 ++: 1

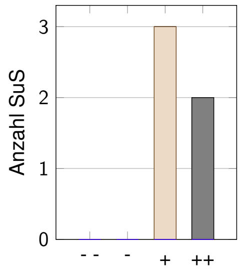
5.6 Die Themen dieses Kurses haben mir Einblicke in die gesellschaftliche Bedeutung von MINT ermöglicht



- -: 0 -: 0 +: 3 ++: 2

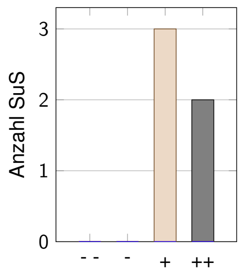
6/10

5.7 Ich würde wieder einen Kurs des zdi-Netzwerkes besuchen



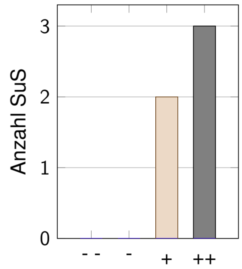
- -: 0 -: 0 +: 3 ++: 2

5.8 Ich würde auch anderen Schülern die Teilnahme an einem Kurs empfehlen



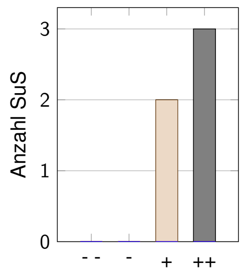
- -: 0 -: 0 +: 3 ++: 2

5.9 Die Betreuer haben das selbstständige Arbeiten gefördert



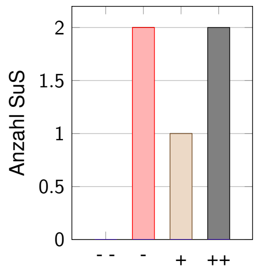
- -: 0 -: 0 +: 2 ++: 3

5.10 Die Betreuer haben die Inhalte plausibel und klar dargestellt



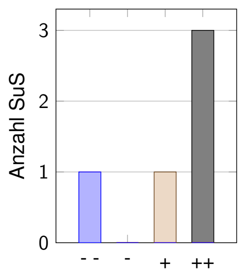
- -: 0 -: 0 +: 2 ++: 3

5.11 Die Anleitungen zu den Aufgaben waren zufriedenstellend und gut verständlich



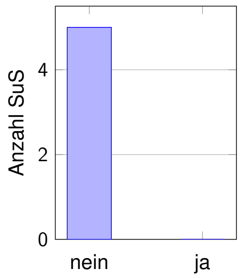
- -: 0 -: 2 +: 1 ++: 2

5.12 Ich kann mir gut vorstellen später ein Studium oder eine Ausbildung im Bereich Technik oder Naturwissenschaften aufzunehmen



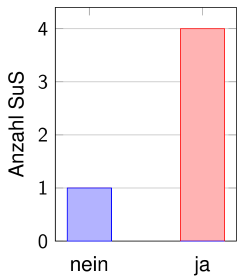
- -: 1 -: 0 +: 1 ++: 3

5.13 Hat dir etwas an dem Kurs absolut nicht gefallen?



nein: 5 ja, und zwar: 0

5.14 Hat dir etwas an diesem Kurs besonders gut gefallen?



nein: 1 ja, und zwar: 4

w (Jgst.: Q1): Synfig.

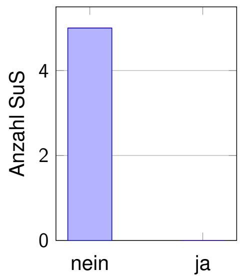
w (Jgst.: Q2): Offene Art der Betreuer.

m (Jgst.: Q2): schöne Anregung der Gehirnzellen.

m (Jgst.: Q2): MATLAB.

8/10

5.15 Hättest du gerne noch etwas anderes gesehen oder erfahren?



nein: 5   ja, und zwar: 0

6 Lernzuwachs

6.1 Was hast du für dich persönlich durch die Teilnahme am Workshop gelernt?

w (Jgst.: Q1): Vielleicht ein bisschen mehr am Ball bleiben.

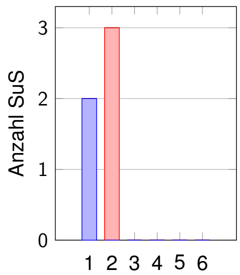
w (Jgst.: Q2): Unterschiede der Interpolation haben großen Einfluss auf die Realitätsnähe.

m (Jgst.: Q2): Erstellen von Animationen mithilfe von Interpolationen und Splines, Aufbau der Erstellung von Animationen (Einführungsvideo).

m (Jgst.: Q2): Synfig.

7 Abschließende Bewertung

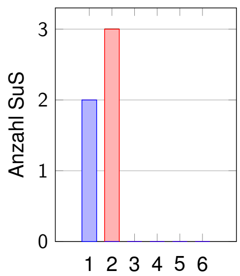
7.1 Ich gebe dem CAMMP day die Schulnote:



1: 2   2: 3   3: 0   4: 0   5: 0   6: 0

Durchschnitt: 2

7.2 Ich gebe den Betreuern die Schulnote:



1: 2   2: 3   3: 0   4: 0   5: 0   6: 0

Durchschnitt: 2

7.3 Abschließender persönlicher Kommentar

w (Jgst.: Q2): War schön hier!.

m (Jgst.: Q2): Ganz interessanter CAMMP day, allerdings wurde zu viel um den heißen Brei herum gearbeitet und das Ergebnis nicht tiefgründig bearbeitet..