**Diese Arbeit wurde vorgelegt am**
**Lehrstuhl für Mathematik (MathCCES)**

# Didaktisch-methodische Ausarbeitung eines Lernmoduls zum Thema mp3 Komprimierung im Rahmen eines mathematischen Modellierungstages für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe II

Bachelorarbeit
Mathematik

September 2016

Vorgelegt von
Presented by

Lars Schmidt
[redacted]

Erstprüfer
First examiner

Prof. Dr. Martin Frank
Lehrstuhl für Mathematik (MathCCES)
RWTH Aachen University

Zweitprüfer
Second examiner

Prof. Dr. Johanna Heitzer
Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH Aachen University

Koreferent
Co-supervisor

Dr. Christina Roeckerath
Lehrstuhl für Mathematik (MathCCES)
RWTH Aachen University

Koreferent
Co-supervisor

Jonas Kusch
Lehrstuhl für Mathematik (MathCCES)
RWTH Aachen University

# Inhaltsverzeichnis


**1 Einleitung** **1**

**2 Didaktischer Hintergrund** **3**
2.1 Das Projekt CAMMP . . . 3
2.1.1 Die Struktur und der Rahmen von CAMMP . . . 3
2.1.2 Ideen und Ziele von CAMMP . . . 4
2.2 Das mathematische Modellieren . . . 5
2.2.1 Der Begriff des mathematischen Modellierens . . . 5
2.2.2 Modellierungskreislauf . . . 6
2.2.3 Ziele des Modellierens . . . 9
2.2.4 Vorteile digitaler Werkzeuge . . . 10

**3 Mathematischer und theoretischer Hintergrund** **11**
3.1 Erfolgskonzept mp3 . . . 11
3.2 Mathematische Modellierung von Tönen . . . 11
3.3 Das Komprimierungsverfahren im Detail . . . 14
3.3.1 Psychoakustisches Hörmodell . . . 14
3.3.2 Fourier- und Diskrete Cosinus Transformation . . . 17
3.3.3 Einteilung in Blöcke . . . 22

**4 Didaktisch-methodisches Konzept** **24**
4.1 Ziele des Lernmoduls . . . 24
4.2 Aufbau des CAMMP days . . . 24
4.3 Entwickelte Materialien . . . 27
4.3.1 Modellierungsvortrag . . . 27
4.3.2 Begleitender Vortrag (Teil I) . . . 28
4.3.3 Arbeitsblatt 1: Töne mathematisch modellieren . . . 29
4.3.4 Begleitender Vortrag (Teil II) . . . 30
4.3.5 Arbeitsblatt 2: Fourieranalyse . . . 31
4.3.6 Begleitender Vortrag (Teil III) . . . 32
4.3.7 Arbeitsblatt 3: Hörmodell . . . 33
4.3.8 Begleitender Vortrag (Teil IV) . . . 34
4.3.9 Arbeitsblatt 4: Komprimierungsverfahren . . . 34
4.3.10 Begleitender Vortrag (Teil V) . . . 35
4.4 Verwendung von MATLAB . . . 36

**5 Durchführung und Evaluation des Moduls** **39**
5.1 Schülergruppe . . . 39
5.2 Leitende Gesichtspunkte der Evaluation . . . 39
5.3 Beobachtungen anhand der leitenden Gesichtspunkte . . . 40
5.4 Resultierende Verbesserungen des Lernmoduls . . . 43
5.5 Zusammenfassung der Ergebnisse . . . 44

**6 Ausblick** **46**

**Literatur** **48**

# 1 Einleitung

Modellierung und Anwendung sind zwei Begriffe, welche eine große Bedeutung für den Mathematikunterricht gewonnen haben. An dieser Stelle ist vor allem die Arbeit von *Werner Blum* zu nennen. Blum verfasste zahlreiche Beiträge zum Thema *Mathematisches Modellieren* und arbeitete an der PISA Studie von 2000 mit. Außerdem formulierte er die Bildungsstandards, welche dann durch die Kultusministerkonferenz (KMK) festgehalten wurden [9], [10].
In didaktischen Diskussionen wird immer wieder betont, wie wichtig es sei, dass den Schülerinnen und Schülern (SuS) anwendungsorientierte Aufgaben gestellt werden. Auf diese Weise sollen die SuS erfahren, welche Rolle die Mathematik in der realen Welt spielt und das Fach nicht nur als künstliches Konstrukt von Formeln wahrnehmen. Realitätsbezüge im Unterricht sollen die SuS außerdem auf ihre Zukunft vorbereiten, denn in einer Vielzahl von Berufen stellt die Modellierung von Problemen einen wichtigen Aspekt dar [3, S. 357f].
Des Weiteren belegen fachdidaktische Forschungen, dass problemorientierter Unterricht die SuS motiviert und gleichzeitig die Selbständigkeit gefördert wird. Die Erfahrung, dass Mathematik als Werkzeug eingesetzt werden kann, um alltägliche Probleme zu lösen, stellt einen der Grundgedanken des CAMMP Konzeptss der RWTH Aachen dar.
Auch die KMK benennt dies als Ziel des Mathematikunterrichts [10, S.13]:

> „Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen wird durch den sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützt. Das Potenzial dieser Werkzeuge entfaltet sich im Mathematikunterricht beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge, insbesondere durch interaktive Erkundungen beim Modellieren und Problemlösen."

Modellierung ist nicht zuletzt deshalb auch eine der Kompetenzen, welche im Kernlehrplan der Gymnasien in Nordrhein-Westfalen festgehalten wurde [6].
Studien belegen jedoch, dass die SuS immer noch große Probleme bei Aufgaben haben, welche die Anwendung von Mathematik zur Lösung eines außermathematischen Problems verlangen [13, S.148]. Hier sind vor allem PISA und TIMSS zu nennen, welche diese Defizite weltweit aufgezeigt haben [9, S.15f]. Daraus kann gefolgert werden, dass die Umsetzung von Realitätsbezügen und anwendungsorientierten Aufgaben im Unterricht noch nicht in ausreichendem Maße geschehen ist.
Die Frage, welche sich nun stellt, ist warum eine derartige Unstimmigkeit zwischen den didaktischen Diskussionen und der praktischen Umsetzung besteht.
Zum einen ist zu betonen, dass die Einbindung von Modellierungen den Unterricht komplexer gestaltet. Die Vorbereitung der Stunden wird wesentlich aufwendiger, da der Unterricht weniger vorhersehbar für die Lehrkraft wird. Je nach Schülergruppe, kann sich das Unterrichtsgeschehen in verschiedene, nicht planbare Richtungen entwickeln [13, S. 151]. Zum anderen ist richtiges Modellieren nicht ohne fächerverbindenden oder -übergreifenden Unterricht möglich. Dies verlangt von der Lehrkraft zusätzliche Arbeit und sofern es ihr Zweitfach nicht hergibt, Aneignung von Wissen.

Auf der anderen Seite ist es gerade zu Beginn, oft schwierig für die SuS anwendungsorientierte offenere Aufgaben zu lösen. Es ist hier nicht möglich, immer nach demselben Schema vorzugehen, und Strategien zur Lösung eines Problems müssen langsam neu entwickelt werden. Der dichte Lehrplan lässt diesen Mehraufwand jedoch kaum zu [3, S. 359].

An dieser Stelle setzt das Schülerlabor CAMMP der RWTH Aachen an. Hier werden im Rahmen von einzelnen Tagen (CAMMP day) oder ganzen Wochen (CAMMP week) reale Probleme betrachtet und mathematisch modelliert. Dazu können sich verschiedene Schülergruppen anmelden und anhand von bereits ausgearbeiteten Modulen ihre Modellierungskompetenzen schulen. Wie oben beschrieben wird die Mathematik hier als Werkzeug benutzt um mithilfe der Software MATLAB ein Lösung zu den gestellten Problemen zu finden.
Außerdem bietet sich für die Lehrkräfte, welche die SuS bei den Modulen begleiten, die Möglichkeit, Anregungen zur Einbindung außermathematischer Kontexte in ihren eigenen Unterricht zu gewinnen.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein weiteres CAMMP Modul entwickelt. Es beschäftigt sich mit der Frage, wie die Komprimierung von Musikstücken mittels des mp3-Verfahrens funktioniert. Das Verfahren, welches für die Komprimierung zuständig ist, ist aus dem Alltag nicht mehr wegzudenken. Wozu früher ein unhandlicher Plattenspieler mit zahlreichen Schallplatten benötigt worden wäre, reicht heute ein kleiner mp3-Player der, der in jede Hosentasche passt. Die SuS sollen im Rahmen des Lernmoduls zunächst verstehen, wie Musik mit dem Computer modelliert werden kann. Anschließend werden Kriterien für ein eigenes Komprimierungsverfahren gesucht, welche am Ende des Moduls dazu führen, dass die SuS mit einem eigenen Verfahren Musik unterschiedlich stark komprimieren können.

In der Arbeit soll im ersten Kapitel zunächst auf die Ziele des Modellierens eingegangen werden. Außerdem wird der fachdidaktische Hintergrund näher betrachtet. Nachdem in der Einleitung schon kurz auf CAMMP verwiesen wurde, sollen im ersten Kapitel detaillierter die Philosophie und die Grundgedanken des Projektes betrachtet werden. Im zweiten Kapitel wird das Augenmerk dann auf die fachlichen, mathematischen Hintergründe des Themas gelegt.
Anschließend wird im dritten Kapitel das didaktisch-methodische Konzept näher erläutert. Hier werden außerdem die entwickelten Materialien vorgestellt und diskutiert. Im letzten Abschnitt wird dann die Durchführung des Moduls mit einer Schülergruppe aus dem Projekt *Schüleruni*[1] vorgestellt und evaluiert. Mit Bezug auf die Schülermeinungen und das Feedback der anwesenden Betreuer wird dann ein Ausblick auf weitere Optimierungsmöglichkeiten des Moduls gegeben.

[1] http://www.rwth-aachen.de/cms/root/Studium/Vor-dem-Studium/Schnupperangebote-Infotage/ cflc/Schueleruniversitaet/

# 2 Didaktischer Hintergrund

Im nun folgenden Kapitel, soll der didaktische Hintergrund des Modellierens betrachtet werden. Das Modellieren stellt einen der zentralen Aspekte des CAMMP Konzeptes dar. Zunächst wird CAMMP jedoch genauer beschrieben und auf die grundlegenden Ideen des Konzepts eingegangen.

## 2.1 Das Projekt CAMMP

### 2.1.1 Die Struktur und der Rahmen von CAMMP

CAMMP ist eine Abkürzung für **C**omputitional **A**nd **M**athematical **M**odeling **P**rogram. Dabei handelt es sich um ein mathematisches Schülerlabor der RWTH Aachen, welches der Lehrstuhl Mathematik CCES zusammen mit der Graduiertenschule AICES organisiert. Im Rahmen der verschiedenen CAMMP Module setzen sich die teilnehmenden SuS, sowie die Lehrkräfte mit realen, herausfordernden Problemen auseinander. Diese Probleme versuchen sie mit geeigneten mathematischen Modellen vor allem unter Einsatz des Computers zu lösen. Die Module richten sich nach den aktuellen Kernlehrplänen, sodass die Inhalte immer miteinander verknüpft werden können und Themengebiete aus dem Lehrplan auf reale Aufgabenfelder angewendet werden. Es wird zwischen zwei verschiedenen Veranstaltungsformen unterschieden, dem CAMMP day und der CAMMP week.

Zunächst zum CAMMP day: Wie der Name schon verrät, beschäftigen sich die teilnehmenden SuS hier einen Tag lang mit den Inhalten des jeweiligen Moduls. Diesen Zeitraum verbringen sie zusammen mit der Lehrkraft an der RWTH Aachen und setzen sich mit einer praxisorientierten Fragestellung auseinander. Unterstützt werden sie dabei von Wissenschaftlern, welche die SuS in die Grundalgen der mathematischen Modellierung einführen. Dabei arbeiten die SuS in kleinen Gruppen zusammen und verwenden die Software MATLAB, um das Problem mathematisch zu lösen.
Momentan stehen sieben verschiedene Module für einen CAMMP day zur Auswahl. Die Lehrkräfte können zusammen mit den SuS zwischen den folgenden wählen:

- Wie funktioniert eigentlich GPS und was hat das mit Mathe zu tun?
- Wie funktioniert eigentlich Google und was hat das mit Mathe zu tun?
- Mit Laptop und Mathe für eine bessere Zukunft: Stromerzeugung durch Sonnenstrahlen
- Von Mickey Mouse bis BUzz Light Year - wie Mathematik die Filmfiguren zum Leben erweckt
- Vom Lotfällen bis zu zum JPEG Format
- Der Shazam-Algorithmus - Wie Mathematik Musik identifiziert

- Wie sicher ist meine Privatsphäre in sozialen Netzwerken und was hat das mit Mathe zu tun?

Hinzu kommt das Modul, welches im Rahmen dieser Arbeit entwickelt wurde:

- Von der Schallplatte bis zum mp3-Player: wie funktioniert das Komprimierungsverfahren?

Neben dem Format des CAMMP days, gibt es noch das Modell der CAMMP week. Dieses Angebot richtet sich ausschließlich an SuS aus der Oberstufe, welche an Mathematik interessiert sind. Im Unterschied zu den CAMMP days können sich die SuS hier einzeln anmelden und verbringen eine Woche zusammen mit anderen SuS in einer Jugendherberge in Belgien. Während dieser Zeit arbeiten sie in kleinen Gruppen an der Lösung einer individuellen Problemstellung, welche aus der aktuellen Forschung von Firmen oder Universitätsinstituten stammt. Dabei werden sie ebenfalls von Wissenschaftlern unterstützt und erhalten noch tiefere Einblicke in die mathematische Modellierung, als es bei CAMMP days der Fall ist. Am Ende der Woche findet eine Abschlussveranstaltung statt, auf der die Ergebnisse von den einzelnen Gruppen unter der Anwesenheit der Auftraggeber präsentiert werden.
Aktuelle Problemstellungen zu diesem Format lauten unter anderem:

- Wie lassen sich verschiedene Bauteile im Auto designen, so dass sie günstig und stabil sind?
- Wie kann man das Buchungssystem einer Carsharing-Firma verbessern?
- Welche Berechnungen und Simulationen muss man vornehmen, um ein möglichst gutes Knochenimplantat für einen Unfallverletzten zu entwickeln?

### 2.1.2 Ideen und Ziele von CAMMP

Die Idee hinter CAMMP ist SuS und Wissenschaftler zusammenzubringen, um die Grundlagen der mathematischen Modellierung anhand von praktischen Beispielen zu erlernen. Dabei verfolgt das Programm mehrere Ziele, zum einen für die SuS, zum anderen aber auch für die begleitenden Lehrkräfte.
Durch seine ständige Weiterentwicklung und Evaluation soll CAMMP die Möglichkeit bieten, neue didaktische Ideen und Verfahren auszuprobieren. Diese Verfahren heben sich vom üblichen Unterrichtsalltag ab und sollen die Kompetenzen im Bereich Modellieren bei den SuS fördern und ausbauen.
CAMMP soll den SuS ermöglichen, die Bedeutung der Mathematik in ihrem Alltag sowie in der Welt zu erkennen und zu verstehen.
Des Weiteren stellt die Berufs- sowie Studienorientierung ein Ziel des CAMMP Konzepts dar. Die SuS sollen für ein mathematisches Studium wie CES sensibilisiert werden und erkennen, für welch großes Berufsfeld mathematisches Denken und Simulationstechnik zum Lösen von Problemen relevant ist.

Auf der anderen Seite beinhaltet CAMMP auch Ziele für die begleitenden Mathematiklehrer und -lehrerinnen. So bieten die Materialien die Möglichkeit, Anregungen und Erfahrungen zu sammeln, wie komplexe, anwendungsbezogene Problemstellungen in den eignen Unterricht integriert werden können. Außerdem werden die SuS motiviert, indem sie reale, lebensnahe Probleme lösen, was ihr Interesse für den Mathematikunterricht verstärkt.

## 2.2 Das mathematische Modellieren

Wie in der Einleitung dieser Arbeit schon erwähnt wird dem Modellieren und dem Realitätsbezug von Aufgabenstellungen in der eine immer größere Bedeutung zugeschrieben. Die Förderung der mathematischen Modellierungskompetenzen zählt nach Befinden der Kultusministerkonferenz zu den sechs allgemeinen mathematischen Kompetenzen [10]. In den Kernlehrplänen Nordrhein-Westfalens für die Sekundarstufe I heißt es wörtlich [6]:

> „Schülerinnen und Schüler nutzen Mathematik als Werkzeug zum Erfassen von Phänomenen der realen Welt. Sie übersetzen Realsituationen in mathematische Modelle [...]. Sie überprüfen und interpretieren die im mathematischen Modell gewonnene Lösung in der jeweiligen realen Situation, bewerten und verändern gegebenenfalls ihren Lösungsweg oder das Modell."

Im Kernlehrplan für die Sekundarstufe II ist Ähnliches zu finden [7]. Es wird also deutlich, wie viel Aufmerksamkeit dem Thema Modellieren bereits gewidmet wird. Im nun folgenden Kapitel soll der Modellierungsbegriff vor seinem theoretischen und didaktischen Hintergrund genauer erklärt werden. Anschließend werden die Ziele von Modellierungsaufgaben im Unterricht thematisiert. Da die SuS während der Module mit einem Laptop arbeiten, wird gegen Ende des Kapitels zudem auf die Vorteile solcher digitalen Werkzeuge im Modellierungsprozess eingegangen.

### 2.2.1 Der Begriff des mathematischen Modellierens

Ein Modell lässt gewisse, nicht besonders relevante, Teilaspekte der Realität weg. Somit ist es eine Abstraktion der Realität, die helfen soll, diese zu verstehen [1, S. 5]. Wird nun ein mathematisches Modell betrachtet, so ist dieses eine mathematische Abstraktion der Realität. Folglich können mathematische Methoden angewendet werden, um das Problem zu lösen [5]. Hier ist jedoch direkt zu betonen, dass es Grenzen gibt, in denen die mathematischen Methoden das reale Problem lösen, da das Modell die komplexe Realsituation ja nicht vollständig beschreibt. So muss bei einem Modell der Realität genau darauf geachtet werden, welche Teilaspekte vernachlässigt werden können. Wie Einstein bereits sagte: „Man muss die Dinge so einfach wie möglich machen. Aber nicht einfacher."[2] Ein Modell der Realität sollte also möglichst einfach sein, um

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Weniger_ist_mehr

das Problem gut lösen zu können. Es sollte aber nicht zu einfach sein, da die Lösung dann möglicherweise überhaupt nicht mehr der Realität entspricht.

Modelle können darin unterschieden werden, welchen Zweck sie erfüllen. Baack unterscheidet zwischen *deskriptiven* und *normativen* Modellen [1]. Deskriptive Modelle beschrieben vereinfacht die Realität, wie zum Beispiel ein Modell des Sonnensystems. Solche Modelle sind subjektiv, da der Konstrukteur des Modells auswählt, was berücksichtigt wird und was nicht [1, S. 6]. Normative Modelle hingegen, sind Mustern, nach denen ein Vorhaben realisiert werden soll [1, S. 6]. Hier könnte man beispielsweise die Spiegeleinstellung für ein Solarkraftwerk als Beispiel anführen, welche auch ein CAMMP Modul darstellt.
In dieser Arbeit bezeichnet der Begriff Modellieren, den gesamten Lösungsprozess eines realen Problems unter Verwendung mathematischer Methoden [1, S. 5]. Dieser Prozess wird auch als Modellierungskreislauf bezeichnet und soll im folgenden näher betrachtet werden.

### 2.2.2 Modellierungskreislauf

Um den mathematischen Modellierungsprozess und somit den Bezug zwischen Realität und Mathematik darzustellen, wird oft auf ein Schema, den sogenannten Modellierungskreislauf zurückgegriffen. In der Literatur ist ein Vielzahl an verschiedenen Darstellungen des Kreislaufs zu finden. Hier wird die Variante nach Blum und Leiß verwendet, welche in der folgenden Abbildung zu sehen ist. Dieses Schema ist besonders gut geeignet, da es detailliert die Schritte beschreibt, welche ein Lernender zum Lösen einer Modellierungsaufgabe durchlaufen muss [5, S. 17].

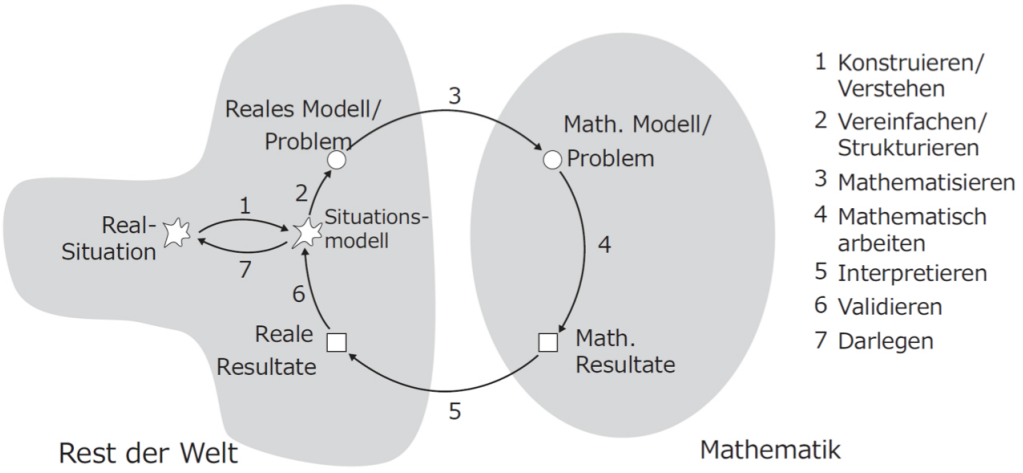


Abbildung 1: Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß [12, S. 25]

Wie in der obigen Abbildung zu sehen ist, besteht der Kreislauf aus sieben Schritten, welche im Folgenden detailliert betrachtet werden:

1. Schritt: **Konstruieren/ Verstehen**
   Den ersten Schritt bildet das Verstehen der Realsituation. Hier wird unspezifisches Alltagswissen zur jeweiligen Realsituation sowie die sprachliche Kompetenz benötigt um ein Abbild der Realität zu konstruieren. Dieses Abbild wird auch *Situationsmodell* genannt [1, S. 7].

2. Schritt **Vereinfachen/ Strukturieren**
   Im nächsten Schritt entsteht dann das *Realmodell*. Die SuS extrahieren hier die relevanten Daten und sortieren irrelevante aus. Fehlende Daten, welche zum Lösen des Problems nötig sind, werden geschätzt, gemessen oder recherchiert. In diesem Schritt gilt es, wie oben beschrieben, das Modell nicht zu einfach zu gestalten, damit die Realsituation nicht zu stark verfälscht wird [1, S. 8].

3. Schritt: **Mathematisieren**
   In diesem Schritt wird das Realmodell in die Sprache der Mathematik übersetzt. Es entsteht das sogenannte *mathematische Modell*, welches nur noch mathematisch relevante Informationen enthält. Auf das nun entstandene Modell können mathematische Lösungsverfahren angewendet werden [1, S. 8].

4. Schritt: **Mathematisch arbeiten**
   Das nunmehr mathematische Problem kann nun mit geeigneten Mitteln gelöst werden. In diesem Schritt werden nun keine Modellierungskompetenzen, sondern die Kompetenzen *Problemlösen* und formale *Fertigkeiten* benötigt. Auch diese finden sich im Kernlehrplan [6]. Unter Verwendung verschiedener, auch digitaler, mathematischer Werkzeuge, auf die weiter noch genauer eingegangen wird, gelangen die SuS zu *mathematischen Resultaten* [1, S. 8].

5. Schritt: **Interpretieren**
   Die mathematischen Resultate müssen nun interpretiert und in Alltagssprache übersetzt werden, um zu den *realen Resultaten* zu gelangen [1, S. 9].

6. Schritt: **Validieren**
   Durch die Lösung des mathematischen Problems und die Übersetzung hin zu den realen Resultaten muss nicht zwangsweise eine Lösung des realen Problems entstehen. Um dies zu überprüfen, müssen die realen Resultate wieder am Situationsmodell validiert werden. Die SuS müssen die Bedeutung ihres Ergebnisses und seine Plausibilität reflektieren. Hier kann es hilfreich sein, die Grenzen des Modells zu testen, also extreme Werte einzusetzen oder das mathematische Modell auf Widerspruchsfreiheit zu testen.
   In den meisten Fällen ist es nötig, den Kreislauf (Schritt 2-6) dann jeweils mit veränderten Annahmen immer wieder zu durchlaufen, bis die erhaltenen realen Resultate mit dem Situationsmodell verträglich sind [1, S. 9].

7. Schritt: **Darlegen**
   Sind die SuS zu vertretbaren und plausiblen Resultaten gelangt, so müssen diese

noch verständlich kommuniziert werden. Dies geschieht im siebten und letzten Schritt des Modellierungskreislaufs [1, S. 9].

Bei dem beschriebenen Kreislauf handelt es sich um ein äußerst komplexes Modell, welches vor allem unter kognitiven Gesichtspunkten erstellt worden ist [5, S. 17]. In der Regel lassen sich nicht alle Zwischenschritte des Modells in der Realität wiedererkennen [5]. Deshalb wird bei den CAMMP Modulen ein vereinfachter und weniger komplexer Modellierungskreislauf verwendet, welcher an ein Schema nach Ortlieb angelehnt und in folgender Abbildung zu sehen ist [5, S. 16].

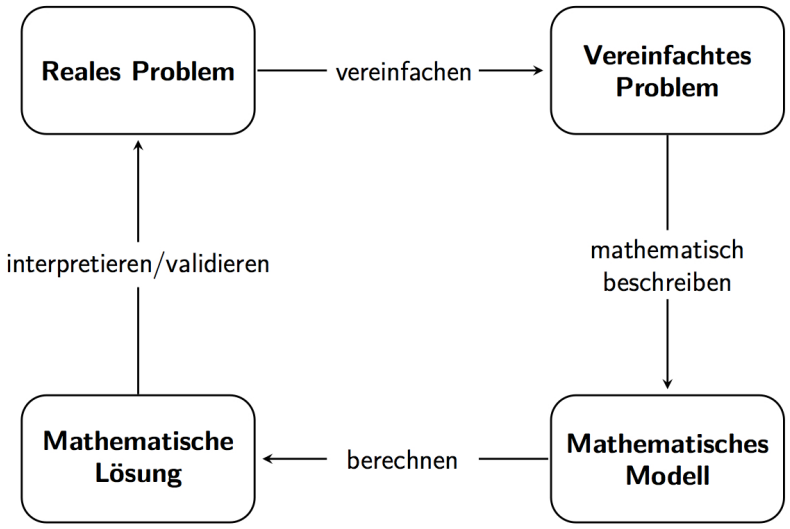


Abbildung 2: In CAMMP Modulen verwendeter Kreislauf nach Ortlieb [5, S. 16]

Der in Abbildung 2 dargestellte Kreislauf zählt zur Kategorie des *Diskreten Mathematisierens*. Ihr werden Modellierungskreisläufe zugeordnet, welche nur einen Schritt von der realen Situation zum mathematischen Modell enthalten [5, S. 16].
Angelehnt ist der hier verwendete Kreislauf an den in Abbildung 1 gezeigten von Blum und Leiß. Es fällt jedoch auf, dass er lediglich vier Schritte enthält, was den SuS eine bessere Orientierung ermöglichen soll, in welchem Schritt sie sich während des jeweiligen Moduls befinden. Im ersten Schritt wird die reale Situation vereinfacht, die Informationen werden strukturiert und daraus resultiert ein vereinfachtes Problem. Dieses muss im nächsten Schritt mathematisch beschrieben werden und die SuS gelangen zu einem mathematischen Modell. Dieses wiederum muss in Schritt drei mit mathematischen Werkzeugen und Methoden gelöst werden um eine mathematische Lösung zu erhalten. Sobald diese vorliegt schließt sich der vierte Schritt an, in dem die Lösung interpretiert werden muss und ihre Plausibilität für das reale Problem überprüft wird. Auch dieser Kreislauf wird immer wieder unter Veränderung der Annahmen durchlaufen, bis die gefundene Lösung zufriedenstellend und mit der Realität verträglich ist [5, S. 16f].

Im Folgenden sollen, wie oben erwähnt, die Ziele mathematischen Modellierens beschrieben werden, bevor auf die Vorteile digitaler, mathematischer Werkzeuge im Modellierungsprozess eingegangen wird.

### 2.2.3 Ziele des Modellierens

Das Einsetzen von Modellierungsaufgaben im Unterricht verflogt verschiedene Ziele. Im bereits viel zitierten Werk *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule: Theoretische und didaktische Hintergründe*, wird zwischen inhaltsorientierten, prozessbezogenen und allgemeinen Zielen unterschieden [5, S. 20]. Diese werden noch von den psychologischen Zielen nach Ferri ergänzt [4, S. 13]. Die im Folgenden näher beschrieben Ziele stellen gleichzeitig die Kriterien für die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Materialien dar.

- **Inhaltsorientierte Ziele**
  Durch Modellierungsaufgaben sollen die SuS ihre Umwelt mit mathematischen Mitteln beschreiben und erschließen können. Ziel ist es, die Erscheinungen in der realen Welt verstehen zu können. Damit verfolgt das Modellieren die selbe Intention, wie die erste *Grunderfahrung* des Mathematikunterrichts nach Winter [5, S. 20].

- **Prozessbezogene Ziele**
  Durch die Anwendungsorientiertheit und den Einsatz von Modellierungsaufgaben im Unterricht sollen außerdem andere Kompetenzen gefördert werden. Dabei ist besonders das *Problemlösen* zu nennen, was durch das Anwenden unterschiedlicher heuristischer Strategien geschult wird. Auch das *Kommunizieren* und *Argumentieren* werden durch Modellierungsaufgaben forciert. Nicht zuletzt durch das Lösen des mathematischen Modells (vgl. Abbildungen 1 und 2), werden auch die *formalen Fertigkeiten* der SuS trainiert. Dies stellt ebenfalls eine Intention der oben bereits erwähnten drei Grunderfahrungen nach Winter dar [5, S. 20].

- **Allgemeine Ziele**
  Modellierungsaufgaben für den Unterricht verfolgen auch das Stärken sozialer Kompetenzen. Damit ist gemeint, dass den SuS ein ausgewogenes Bild der Mathematik als Wissenschaft vermittelt werden soll. Sie sollen durch den Mathematikunterricht zu mündigen und verantwortungsvollen Mitgliedern der Gesellschaft ausgebildet werden. Außerdem sollen die SuS die Bedeutung von Mathematik für die Technik und ihre Rolle in der Welt kennenlernen [5, S. 20].

- **Psychologische Ziele** Die psychologischen Ziele nehmen nach Ferri eine Sonderrolle ein, da sie quer zu den anderen Zielen verlaufen. So sollen die SuS durch Modellierungsaufgaben motiviert werden. Interesse für das Fach Mathematik soll geweckt und eine negative Einstellung gegenüber dem Fach durch anwendungsorientierte Aufgaben in eine positive geändert werden [4, S. 13].

### 2.2.4 Vorteile digitaler Werkzeuge

Da die SuS während der CAMMP Module mit Laptops und der Sofware MATLAB arbeiten, soll nun kurz auf die Vorteile solcher digitaler Werkzeuge im Modellierungsprozess eingegangen werden.
Im *Handbuch der Mathematikdidaktik* unter anderem verfasst von Regina Bruder [3] wird diesem Aspekt ein ganzes Unterkapitel gewidmet. Im Kontext von realen Problemen wird ein Computer dort als „sinnvolles Werkzeug zur Unterstürzung“ von SuS bezeichnet [3, S. 371]. Die digitalen Werkzeuge können eingesetzt werden um das mathematische Modell aufzustellen und zu lösen. Die Simulationen mithilfe von Computern können also gewissermaßen als Bestandteil des Modellierungskreislaufs gesehen werden. Des Weiteren ermöglicht eine Simulation eine einfache Überprüfung der Ergebnisse.
Die digitalen Werkzeuge können an vielen weiteren Stellen im Kreislauf eingesetzt werden, wie die folgende Abbildung zeigt.

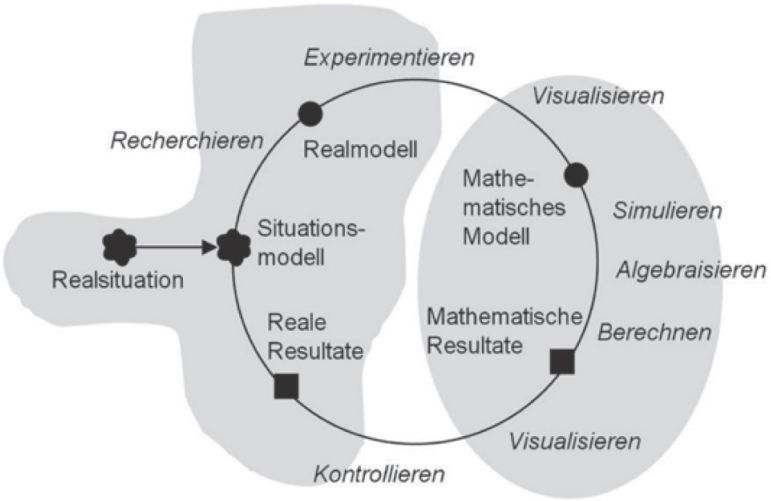


Abbildung 3: Modellierungskreislauf aus Abbildung 1 unter Einsatz digitaler Werkzeuge [3, S. 373]

Anhand von Abbildung 3 wird deutlich, welche Vereinfachung und welche Vielzahl an Möglichkeiten der Einsatz von digitalen Werkzeugen bei Modellierungsaufgaben bietet. So können durch den Einsatz von Laptops wie bei CAMMP beispielsweise schon zu Beginn des Kreislaufs fehlende Informationen einfach im Internet recherchiert werden. Weitere Vorteile sind die Reduzierung des Zeitaufwands. Der Fokus wird liegt nicht auf den mathematischen Fertigkeiten der SuS, sondern eher auf dem wirklichen Modellierungsprozess [3, S. 371].
Der Einsatz von digitalen Werkzeugen bei Modellierungsaufgaben ist also vielseitig möglich und bringt zahlreiche Vorteile mit sich.

# 3 Mathematischer und theoretischer Hintergrund

Egal ob auf Handys, Computern oder Streaming Diensten wie Spotify: Musik ist heutzutage überall zugänglich. Ausschlaggebend dafür war die Entwicklung des mp3-Komprimierungsverfahrens. Warum sich dieses Verfahren so stark durchsetzen konnte und was die Technik dahinter ist, wird in den folgenden Abschnitten erläutert. Als Anleitung zum Verfahren diente eine Veröffentlichung von *Karlheinz Brandenburg* [2], welcher an der Entwicklung des Komprimierungsverfahrens beteiligt war.

## 3.1 Erfolgskonzept mp3

Das mp3-Komprimierungsverfahren ist aus unserem Alltag nicht mehr wegzudenken. Dank der Entwicklung dieser Technik ist es möglich geworden, eine gesamte Musiksammlung auf einem Gerät zu speichern, dass nicht größer als eine USB- Stick ist.
Die korrekte Bezeichnung des Datei-Formats lautet eigentlich eigentlich MPEG-1 Audio Layer III, ".mp3" ist die Dateinamenserweiterung. Entwickelt wurde es hauptsächlich vom Frauenhofer Institut für Integrierte Schaltungen IIS in Erlangen. Dass die Entwicklung oft auch als „deutsche Erfolgsgeschichte"[14] beschrieben wird, kann noch durch heutige Zahlen gerechtfertigt werden. Auf der Internetseite des IIS heißt es, dass sich die durch mp3 induzierten Steuereinnahmen für Bund und Länder auf mindestens 300 Millionen Euro pro Jahr belaufen. Des Weiteren ergeben die Lizenzerträge der Fraunhofer-Gesellschaft aus den mp3-Patenten jährlich einen hohen zweistelligen Millionenbetrag. Ferner seien mindestens 9.000 Arbeitsplätze in Deutschland direkt bedingt durch mp3, zum Beispiel im Handel oder bei Herstellern von mp3-Playern.[3]
Kennzeichnend für das mp3-Verfahren ist das gute Verhältnis zwischen Speicherplatz und Qualität der komprimierten Audiodatei. Das Verfahren stützt sich im Wesentlichen auf ein psychoakustisches Hörmodell. Vereinfacht gesagt werden hier einfach die Frequenzen aus dem original Lied herausgestrichen, die das menschliche Gehör nicht wahrnehmen kann. Die Ursachen dafür können verschiedene sein, zum Beispiel zu niedrige oder zu hohe Frequenzen. Das menschliche Gehör kann Frequenzen von $20Hz$ bis $20kHz$ wahrnehmen. Folglich gibt es Frequenzbereiche, welche auf Grund dessen aussortiert werden können.
Im nachfolgenden Abschnitt wird das Komprimierungsverfahren detailliert beschrieben.

## 3.2 Mathematische Modellierung von Tönen

Bevor ein Blick auf das genaue Komprimierungsverfahren geworfen werden kann, muss zunächst die Frage geklärt werden, was überhaupt ein Ton ist und wie man diesen mathematisch ausdrücken kann.
Wenn Menschen sprechen, so geschieht dies vereinfacht gesagt, indem ihre Stimmbänder in Schwingung gebracht werden. Dies erzeugt dann, wie bei dem Schwingen einer

[3] http://www.iis.fraunhofer.de/content/dam/iis/de/doc/ame/FraunhoferIIS_Produktbroschüre_mp3.pdf, S. 4

Gitarrenseite, einen Ton oder ein Geräusch, welches von anderen Menschen über das Gehör wahrgenommen werden kann. Ein einzelner Ton ist also nichts anderes als eine Schwingung. Durch einen Computer oder ein Oszilloskop kann eine solche Schwingung sichtbar gemacht werden, vergleiche dazu die folgende Abbildung.

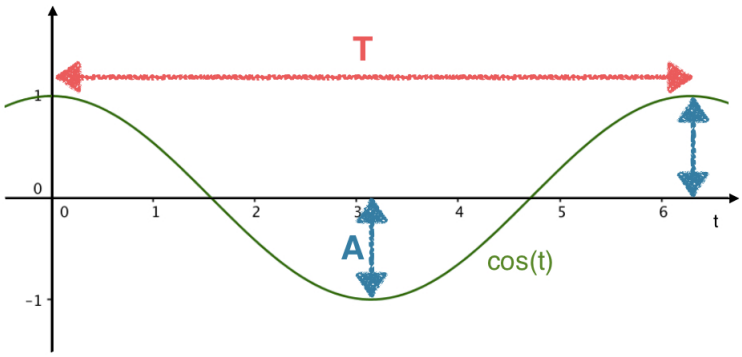


Abbildung 4: Cosinus Schwingung (grün). In blau ist die Amplitude $A$ und in rot die Periodendauer $T$ dargestellt.

In Abbildung 4 ist beispielhaft eine Cosinus Schwingung dargestellt. Diese wird mathematisch durch

$$y(t) = A \cdot cos(\omega t) \tag{1}$$

beschrieben. Hierbei steht $T$ für die Periodendauer, welche angibt wie lange eine Schwingungsperiode dauert. Es gilt der wichtige Zusammenhang

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \ .$$

Hierbei stellt $f$ die Frequenz der Schwingung da. Sie gibt an, wie viele Schwingungsperioden sich in einer Sekunde ereignen und hat folglich die Einheit $\frac{1}{s}$ oder auch Hertz $(Hz)$. $\omega$ nennt man auch die Kreisfrequenz. Im Gegensatz zur Frequenz $f$, gibt sie aber nicht die Anzahl der Schwingungsperioden bezogen auf eine Zeitspanne an, sondern den überstrichenen Phasenwinkel der Schwingung pro Zeitspanne.
Wie in der Formel für $T$ zu sehen, gilt, dass je kleiner die Periodendauer ist, desto höher ist die Frequenz $f$. Liegen die Maxima einer Schwingung also nah bei einander, spricht man von einer hohen Frequenz, liegen sie weiter auseinander von einer Niedrigen. Überträgt man dies wieder auf einen Ton, so steht eine **hohe Frequenz** für einen **hohen Ton** und eine **niedrige Frequenz** für einen **tiefen Ton**. Die Stimme einer Frau beispielsweise ist meist höherfrequent als die eines Mannes.
In blau ist in Abbildung 4 die Amplitude der Schwingung dargestellt. Sie gibt die maximale Auslenkung der Schwingung an. Wieder übertragen auf einen Ton gilt, dass der **Betrag der Amplitude** gleich der **Lautstärke des Tons** ist.
Oben wurde bereits erwähnt, dass der Mensch Töne mit seinem Gehör wahrnimmt. Wie dieser Prozess genau funktioniert, soll an dieser Stelle nicht genau beschrieben

werden. Vereinfacht gesagt, wird aber durch eine Schwingung das Trommelfell im Ohr in Bewegung gebracht. Nach diesem Modell erscheint es logisch, dass es Frequenzen geben kann, welche es nicht schaffen das Trommelfell in Schwingung zu versetzen. Dies sind dann Frequenzen, welche das menschliche Gehör nicht wahrnehmen kann. Töne mit solchen Frequenzen sind es, welche nachher im Komprimierungsverfahren gestrichen werden können.
Das oben beschriebene Beispiel einer einfachen Cosinus Schwingung kommt in der Realität nicht oft vor. Hier sind komplexere Schwingungen viel häufiger, welche auf den ersten Blick nicht mehr nach einer Cosinus beziehungsweise Sinusfunktion aussehen:

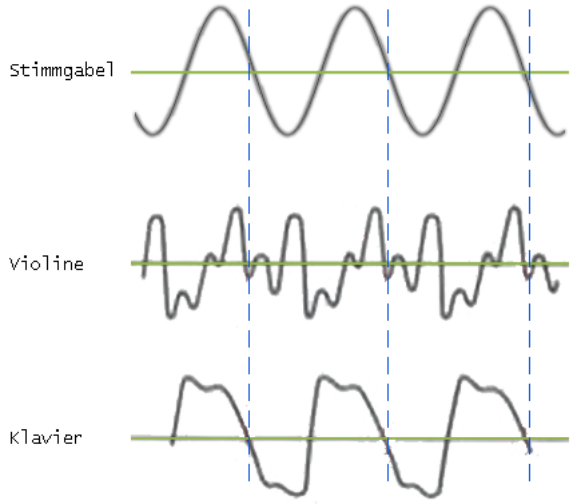


Abbildung 5: Oben: einfache Sinusschwingung einer Stimmgabel mit einer Frequenz von $440Hz$.
Mitte: Periodische Schwingung einer Violine. Unten: periodische Schwingung eines Klaviers. Violine und Klavier auch bei $440Hz$ und gleicher Amplitude.[4]

In Abbildung 5 ist zu erkennen, dass ein Ton mit der selben Tonhöhe (Frequenz) und der selben Lautstärke (Amplitude) auf unterschiedlichen Instrumenten ein völlig unterschiedliches Schwingungsbild liefert. Grund hierfür sind die Oberschwingungen, welche bei Klavier und Violine auftreten. Diese beinhalten Vielfache der Grundfrequenz $f = 440Hz$.
Nun stellt sich die Frage, ob auch solche komplexen Töne durch Sinus- bzw. Cosinus Schwingungen dargestellt werden können. Die genaue Antwort darauf wird in Abschnitt 3.3.2 zur Fourier Transformation betrachtet. Hier soll jedoch schon festgehalten werden, dass es möglich ist jede periodische Schwingung als Überlagerung von einzelnen Sinus und Cosinus Schwingungen, sogenannte Basisfunktionen wie in (1) darzustellen. Das wird durch ein mathematisches Werkzeug, die sogenannte Fourier-Transformation realisiert. Da ein Audiosignal auch nichts anderes ist als die Abfolge und Überlagerung

[4]Abbildung nach http://me-lrt.de/reelle-fourieranalyse-fourierreihenentwicklung
Eingesehen: 12.09.2016

von Tönen, also Schwingungen, kann dieses auch in Basisfunktionen unterteilt werden. In den Basisfunktionen kann dann direkt die jeweilige Frequenz $f$ abgelesen werden.

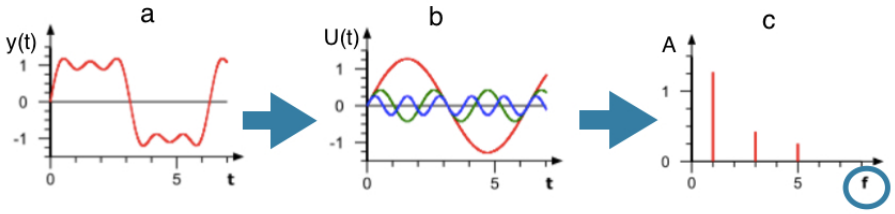


Abbildung 6: Zerlegung eines komplexen periodischen Audiosignals (a) in die Basisfunktionen (b). Frequenzen der Basisfunktionen in (c) dargestellt.[5]

In Abbildung 6 ist ein komplexes Audiosignal (a) mittels Fourier Transformation (siehe Abschnitt 3.3.2) in seine Basisfunktionen unterteilt worden. Diese Basisfunktionen sind in b abgebildet. In c ist nun nicht mehr die Auslenkung $U$ gegen die Zeit $t$ aufgetragen, sondern die Amplitude $A$ gegen die Frequenzen $f$ aus den Basisfunktionen.
Auch bei komplexen Audiosignalen kann es passieren, dass die Frequenz einer Basisfunktion nicht wahrnehmbar für das menschliche Gehör ist. Eine solche Frequenz ist dann auch in der Überlagerung wie in Abbildung 6 a nicht wahrnehmbar. Durch die Überlagerung kann es außerdem dazu kommen, dass durch die Kombination der Basisfunktionen weitere Frequenzen gestrichen werden können. Eine detaillierte Betrachtung dazu erfolgt in Abschnitt 3.3.1 zum Thema Maskierung.

## 3.3 Das Komprimierungsverfahren im Detail

### 3.3.1 Psychoakustisches Hörmodell

Das psychoakustische Hörmodell ist das Herzstück des mp3-Komprimierungsverfahrens. Es liefert diejenigen Informationen, nach denen Frequenzanteile aus dem original Musikstück heraus gefiltert werden. Führend im Forschungsbereich der Psychoakustik waren die Bell Laboratories in den USA. Sie führten Studien mit zahlreichen Probanden durch, um das Hörmodell zu optimieren. Dies war nötig, da jeder Mensch eine andere akustische Wahrnehmung besitzt. Nach Jahren der Forschung und immensen Summen von Fördergeldern konnte das Hörmodell fertig gestellt und in das Verfahren vom Frauenhofer IIS eingesetzt werden[6].
Das Modell bezieht verschiedenste Faktoren in seine Auswahl ein. Auf einige von ihnen möchte ich nun eingehen.

[5] Teile der Abbildung von https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/f/fa/Fourier_synthesis.svg/2000px-Fourier_synthesis.svg.png Eingesehen: 13.09.2016
[6] Nach Dr. Harald Sack, Rechnernetze und Internettechnologie, Sommersemester 2008, Uni Jena

### Hörschwelle

Bedingt durch den Aufbau des menschlichen Gehörs gibt es eine untere und eine obere Grenze für Frequenzen, die wahrgenommen werden können. Wie schon oben beschrieben liegt die Wahrnehmung in einem Bereich von $20Hz$ bis $20kHz$. Die Hörschwelle ist jedoch keine gerade Linie sondern immer auch abhängig von der Lautstärke eines Signals.

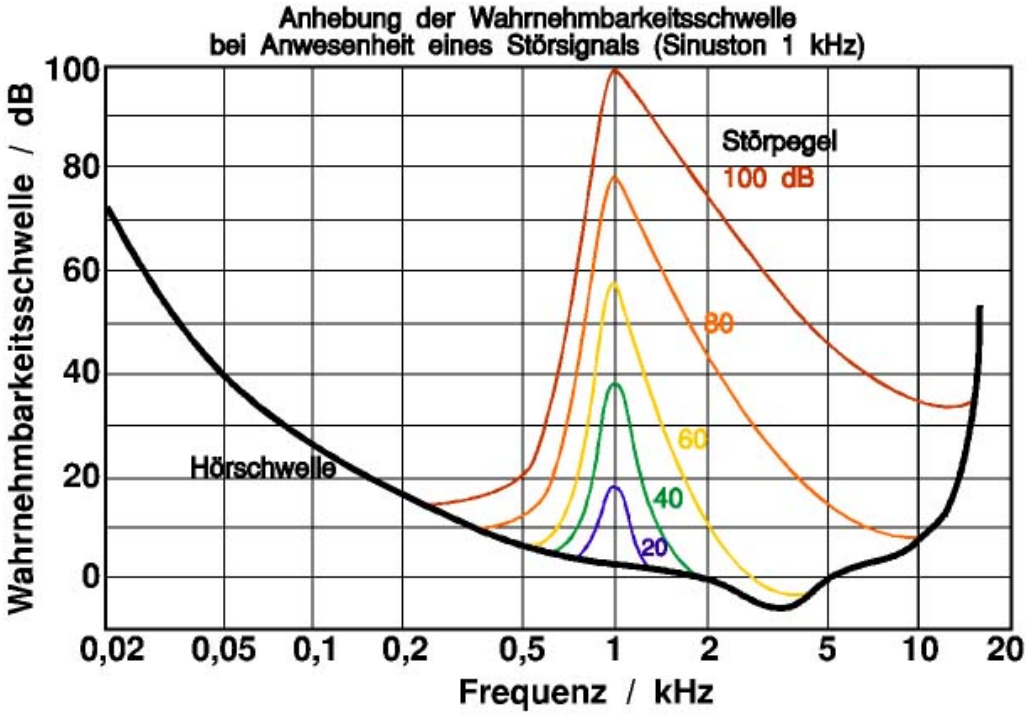


Abbildung 7: Hörschwelle des menschlichen Gehörs. Auftragung der Frequenz gegen die Lautstärke. In bunt sind Störsignale der Frequenz $1kHz$ und Lautstärken von $20dB - 100dB$ aufgetragen. Der Bereich über der schwarzen Linie ist für das Gehör wahrnehmbar. [7]

In der Abbildung 7 ist zu erkennen, dass niedrige Frequenzen, sprich tiefe Töne, erst wahrgenommen werden können, wenn sie über $70dB$ laut sind. Höher frequentige Signale, sprich höhere Töne, im Bereich von $3-4kHz$ hingegen können schon bei einer deutlich geringeren Lautstärke registriert werden.
Was in der Abbildung ebenfalls zu sehen ist, ist ein Störsignal (Sinuston bei $1kHz$). Es ist zu beobachten, dass bei einem solchen Störsignal die Hörschwelle in der Umgebung angehoben wird (bunte Linien). Beispielsweise muss ein Ton mit einer Frequenz von ca. $0,75kHz$ schon eine Lautstärke von ca. $40dB$ aufweisen, damit das Gehör ihn trotz des grün eingezeichneten Störsignals von $40dB$ aufzeichnen kann. Wie der Abbildung 7 zu entnehmen ist, müsste ein Ton der selben Frequenz ohne Störsignal nicht einmal eine

[7] Abbildung von https://commons.wikimedia.org/wiki/File:AkustikMithoerschwelle2.JPG Eingesehen: 12.09.2016

Lautstärke von $10dB$ aufweisen, um vom menschlichen Gehör registriert zu werden. Dieser Punkt führt zum nächsten Faktor: der Maskierung.

### Maskierung

Man unterscheidet hier im Allgemeinen zwischen simultaner und zeitlicher Maskierung. Die simultane Maskierung ist schon in Abbildung 7 zu sehen. Hier gibt es ein Störgeräusch, was gleichzeitig (simultan) zu einem anderen Ton abgespielt wird. Das lautere Störgeräusch kann dann den anderen Ton mit leicht geringerer oder höherer Frequenz verdecken, wenn dieser zu leise ist.
Neben der simultanen Maskierung gibt es jedoch auch die zeitliche Maskierung.
Um diesen Prozess besser verstehen zu können ist in Abbildung 8 ein Signal nicht auf der Frequenzachse, sondern auf der Zeitachse aufgetragen.

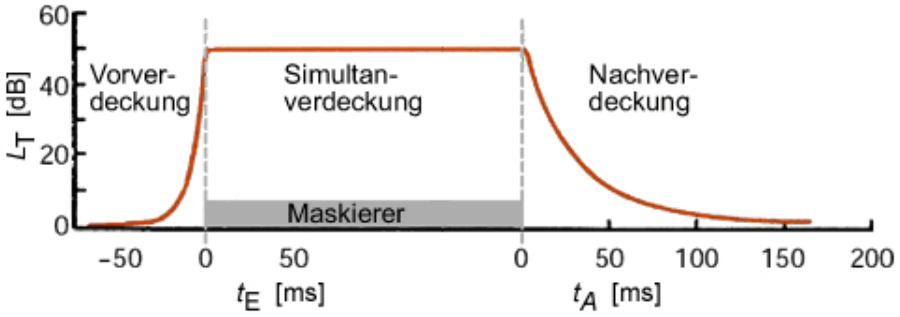


Abbildung 8: Temporale Maskierung [16, S. 94]

Ein Störgeräusch (Maskierer) maskiert nämlich nicht nur die Frequenzen, die gleichzeitig mit ihm auftreten, sondern auch einige unmittelbar vor und nach dem Maskierer. Bei diesen Effekten spricht man von der sogenannten Vor- bzw. Nachverdeckung [16, S. 93f].
Die Nachverdeckung ist dadurch zu erklären, dass die Mechanismen in unserem Ohr eine gewisse Zeit brauchen um nach der Verarbeitung eines lauten Signals wieder ein leiseres wahrnehmen zu können. Im ersten Moment verwunderlich scheint jedoch die Vorverdeckung. Diese kommt nicht etwa dadurch zustande, dass unser Gehör „in die Zukunft hören könnte“[16, S. 94], sondern durch die verschiedenen Verarbeitungszeiten für ein Signal in unserem Gehör. Um ein leises Signal zu verarbeiten, benötigt unser Gehör eine längere Zeit als für ein lautes Signal. Somit ist es zu erklären, dass das laute Signal, obwohl es erst nach dem leisen kommt, schneller verarbeitet werden kann und so quasi das leise “überholt“.
Der Effekt der Nachverdeckung hält jedoch etwa fünfmal so lange, wie der der Vorverdeckung. Deshalb ist dieser der dominierende Effekt für das psychoakustische Hörmodell.

Nun wurden drei verschiedene Faktoren beschrieben, welche genutzt werden können, um Frequenzen aus dem original Lied zu streichen. Der erste Faktor ist die Hörschwel-

le, welche angibt, welche Frequenzen ab welchen Lautstärken wahrgenommen werden können. Der zweite Faktor ist die simultane Verdeckung. Hierbei können Frequenzen gestrichen werden, welche durch ein gleichzeitig auftretendes Störgeräusch (einen lauteren Ton) verdeckt werden. Der dritte Faktor ist die temporale Verdeckung. Sie erlaubt es, auch noch Frequenzen zu streichen, welche vor und nach einem Maskierer auftreten. Die nach diesen Kriterien gestrichenen Frequenzen, dürften die Qualität des Musikstücks nicht wesentlich beeinflussen, da sie ja nach dem psychoakustischen Modell sowieso nicht hörbar sind.
Die nächste Frage lautet nun: Wie erhält man aus einem Musikstück überhaupt eine Auflistung der vorkommenden Frequenzen? Die Antwort darauf liefert der nächste Abschnitt.

### 3.3.2 Fourier- und Diskrete Cosinus Transformation

#### Fourier Transformation

Der mathematische Hintergrund zur Fourieranalyse wurde einem Kapitel der Internetseite http://www.mathe-online.at/ entnommen. Dieses wurde von den Autoren der Seite in Zusammenarbeit mit der Fachhochschule Technikum Wien entwickelt. Die angegebene Internetseite hat es sich zur Aufgabe gemacht, Themen auch für Universitätsstudien aufzuarbeiten. Die dabei erstellten Inhalte „sollten sich durchaus für Nachhilfe, Studium und Erwachsenenbildung eignen, wenn ein etwas tieferes Verständnis als das bloße Anwenden von Regeln angestrebt wird und Zusammenhänge zwischen den einzelnen Teilgebieten deutlich werden sollen“[15].

In der Naturwissenschaft und der Technik nehmen periodische Vorgänge eine wichtige Rolle ein. So kann man zum Beispiel die Schwingung eines Pendels oder akustische Signale als solche bezeichnen.
Wie eingangs beschrieben kann eine solche Schwingung mathematisch als Superposition, also eine Überlagerung von Sinus und Cosinus Termen beschreiben werden:

$$y(t) = A_1 \cdot sin(\omega t) + A_2 \cdot cos(\omega t).$$

Ist die Schwingung mit Hilfe dieser Gleichung darstellbar, so spricht man von einem *harmonischen Oszillator* mit der Kreisfrequenz $\omega$ und der Schwingungsdauer
$T = 2\pi/\omega$.
In der Realität ist es jedoch nicht immer so einfach. Beispielsweise schon das Zupfen an einer Gitarrensaite erzeugt ein akustisches Signal, das zwar periodisch ist, jedoch nicht mehr sinusförmig verläuft[8]. Wie im vorherigen Abschnitt erwähnt kann ein solches Signal in Basisfunktionen, welche dann wieder harmonische Schwingungen sind, zerlegt werden. Dieses Zerlegungsverfahren wird als *Fourier-Zerlegung* bezeichnet. Das Ergebnis einer solchen Zerlegung ist eine unendliche Reihe, welche auch *Fourier-Reihe* genannt wird.

[8] siehe LEIFI: http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/akustische-phanomene
Eingesehen: 12.09.2016

Eine *Fourier-Reihe* hat die folgende Gestalt:

**Satz: Fourier- Reihe**
Sei $t \in \mathbb{R}$ und $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ , $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ reelle Folgen, dann bezeichnet man

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

als Fourier- Reihe.

Die Koeffizienten $a_0$, $a_k$ und $b_k$ als *Fourierkoeffizienten* bezeichnet.

Man kann sich darunter vorstellen dass ein Signal, also eine Eingangsfunktion, einfach durch eine andere Basis ausgedrückt wird. Dieser Basiswechsel bewirkt, dass man die Frequenzen aus denen das Signal besteht nun direkt ablesen kann.
Diese neu gewählte Basis $(1,\ cos(kt),\ sin(kt),\ k > 0)$ kann man mathematisch über folgende Orthogonalitätsbeziehungen rechtfertigen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos(mt)cos(nt)dt = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} sin(mt)sin(nt)dt,\ falls\ n \neq m \tag{2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos(mt)cos(nt)dt = \pi = \int_{-\pi}^{\pi} sin(mt)sin(nt)dt,\ falls\ n = m \tag{3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos(mt)sin(nt)dt = 0 \tag{4}$$

Integriert man nun

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

über den $2\pi$-periodischen Raum, so erhält man folgende Gleichungen für die Fourier Koeffizienten:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)cos(kt)dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)sin(kt)dt$$

Abschließend möchte ich noch ein kurzes Beispiel geben um das Prinzip der Fourier-Transformation zu verdeutlichen. Hier wird die anfangs erwähnte Gitarrensaite wieder aufgegriffen.
Diese lässt sich in guter Näherung durch zwei gegeneinander laufende Dreieckswellen darstellen[9]. Der Einfachheit halber möchte ich die periodische Fortsetzung der Funktion $f(t) = |t|$, $-\pi \leq t \leq \pi$ betrachten (sie Abbildung 9).

[9]siehe LEIFI http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/akustische-phanomene

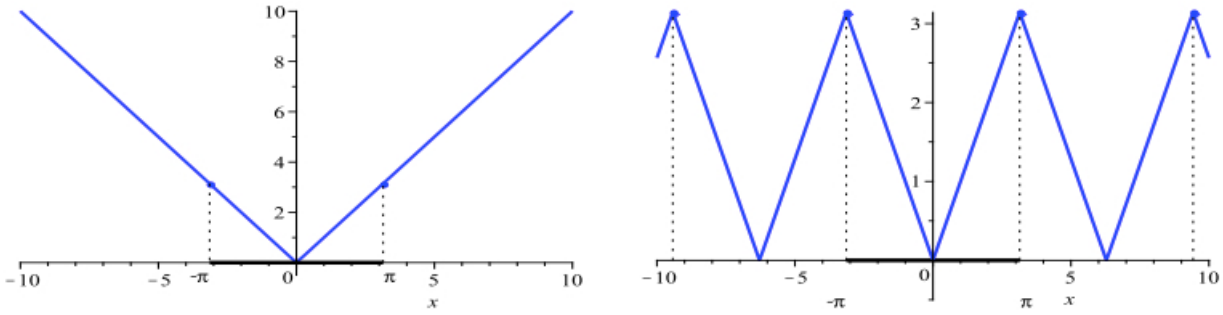


Abbildung 9: Dreiecksschwingung Links: Betragsfunktion für $t \in [-10, 10]$. Rechts: periodische Fortsetzung für $f(t) = |t|$, $-\pi \leq t \leq \pi$

Für die Koeffizienten kann man folgendes nachrechnen:

$$a_0 = \pi, \quad a_k = \begin{cases} 0, & \text{wenn } k \text{ gerade,} \\ -\frac{4}{\pi}\frac{1}{k^2}, & \text{wenn } k \text{ ungerade.} \end{cases}, \quad b_k = 0$$

Damit folgt für die Fourier- Reihe:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{cos((2k-1)t)}{(2k-1)^2} \tag{5}$$

Dieses Ergebnis kann nun visualisiert werden. Dazu wird in (5) nur bis zu einem gewissen $n \in \mathbb{N}$ aufsummiert.

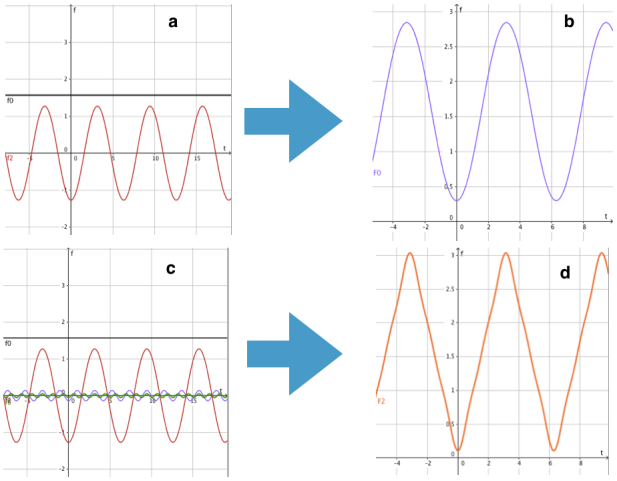


Abbildung 10: Fouriertransformation der Betragsfunktion. Bilder a und b für $n = 1$. Bilder c und d für $n = 3$. Bilder b und d ist die resultierende Schwingung bei der Summation der einzelnen Schwingungen in a und c.

Wird nun $n = 1$ gewählt, so ergibt sich lediglich ein konstanter Anteil von $\pi/2$ und eine Cosinus Schwingung $-4/\pi \cdot cos(t)$ (siehe Abbildung 10 a und b).
Lässt man die Summe in (5) hingegen nur etwas weiter bis $n = 3$ laufen, so erhält man zwei weitere Cosinus Schwingungen mit geringeren Amplituden, aber höheren Frequenzen (siehe Abbildung 10 c und d).
Es ist schon hier bemerkbar, dass die Summe aus den einzelnen Schwingungen immer mehr wie die ursprüngliche Dreiecksfunktion aussieht. Würde man den Summationsindex $n$ weiter erhöhen, könnte man ein besseres Ergebnis erzielen, da immer mehr Frequenzen berücksichtigt werden würden. Durch den Basiswechsel können die Frequenzen nun einfach abgelesen werden. Die Amplitude, also die Lautstärke zur jeweiligen Frequenz, ist der Faktor vor dem jeweiligen Cosinus Term. Es ergibt sich ein Spektrum wie in Abbildung 11 zu sehen.

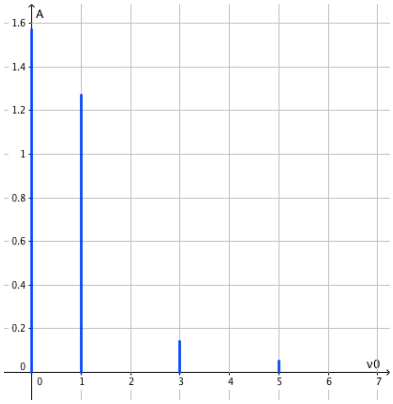


Abbildung 11: Vielfache der Grundfrequenz mit zugehöriger Amplitude für $n = 3$

Der Vorteil dieser Darstellung ist, dass zu einer Frequenz der Basisfunktion direkt die Amplitude (Höhe der Balken in Abbildung 11) abgelesen werden kann und die Frequenzen der Größe nach geordnet sind. So können im Komprimierungsverfahren nachher einfach zu hohe Frequenzen ab einer bestimmten Stelle gestrichen werden, da ab dieser Grenze ja nur noch höhere Frequenzen kommen. Genau so können niedrige Frequenzen bis zu einer gewissen Grenze gestrichen werden. Die jeweilige Grenze wird durch das oben beschriebene psychoakustische Hörmodell beschrieben. Zusammenfassend kann man nun sagen, dass ein Verfahren gefunden wurde, welches aus einem Audiosignal die Frequenzen ausgibt. Außerdem scheint es möglich zu sein, nicht alle Frequenzen berücksichtigen zu müssen, um das Audiosignal gut modellieren zu können. In der folgenden Abbildung ist noch ein Beispiel für den Kammerton a' einer Violine gegeben:

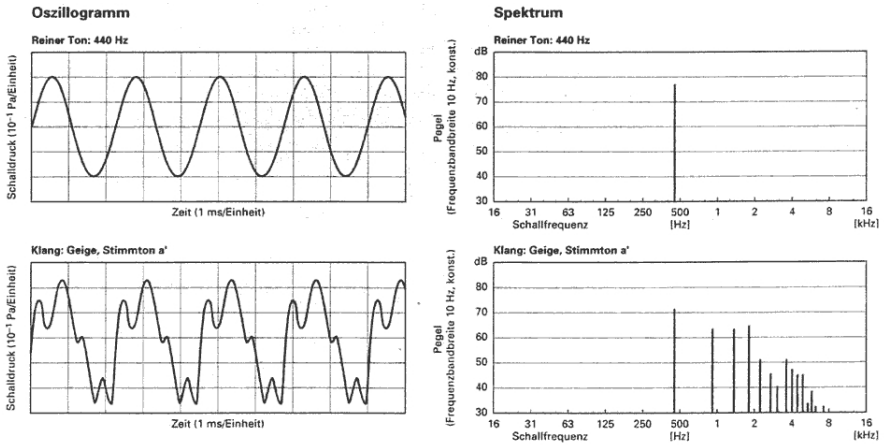


Abbildung 12: Fourieranalyse eines Tons. Oben a' auf einer Stimmgabel. Unten a' auf einer Violine.[10]

In Abbildung 12 ist links der jeweilige Ton dargestellt. Oben ist der Ton a' auf einer Stimmgabel abgebildet, darunter auf einer Violine. Auf diesen Ton wurde dann eine Fourieranalyse angewendet und die jeweiligen Frequenzen der Basisfunktionen wie in Abbildung 10 dargestellt (links). Es kann beobachtet werden, dass das a' auf der Stimmgabel nur eine Basisfunktion, also nur eine Frequenz enthält. Der gleiche Ton auf der Violine gespielt enthält neben der Basisfunktion der Stimmgabel weitere Basisfunktionen, also weitere Frequenzen. Die Basisfunktion, welche bei beiden Instrumenten vorkommt, ist die sogenannte Grundschwingung. Die zusätzlichen Basisfunktionen mit ihren Frequenzen, welche der Ton der Violine enthält, werden als Oberschwingungen bezeichnet. So kommt es, dass beide Instrumente ein a' spielen, es sich aber anders anhört.

### Diskrete Cosinus Transformation

Da die Transformation später mit MATLAB, also mit einem Computer durchgeführt wird, muss das Verfahren noch etwas abgeändert werden. Ein Computer ist nicht in der Lage, eine Funktion kontinuierlich abzutasten. Er benötigt endlich viele *diskrete* Werte, mit denen er rechnen kann (Stufenfunktion in Abbildung 13). Diese diskreten Werte werden alle im gleichen Abstand aufgenommen. Hat man eine einfache Sinus Schwingung als eingehendes Signal, so kann der Computer beispielsweise 10 Punkte pro Sekunde errechnen.
Diese Zahl, also wie viele Punkte pro Sekunde aufgenommen werden bezeichnet man auch als *Sampling-Rate*. Für Musikstücke liegt diese Rate typischerweise bei $44100Hz$. Es werden also 44100 Punkte pro Sekunde aufgenommen und gespeichert. Um nun,

[10] Abbildung von http://www.laermorama.ch/m1_akustik/tonklang_w.html Eingesehen: 12.09.2016
[11] Abbildung von http://www.sony.at/electronics/audio-komponenten/hap-z1es Eingesehen 12.09.2016

Abbildung 13: In grau: kontinuierliches Signal. In Blau: verschiedene Stufenfunktion durch diskrete Werte. Links Sampling Raten bei $44,1kHz$ (normal). Rechts: Sampling Rate bei $96kHz$.[11]

wie oben beschrieben, die einzelnen Frequenzen eines eingehenden Signals herauszufinden, verwendet der Computer dann auch ein diskretes Verfahren: die sogenannten *Diskrete-Cosinus-Transformation*, kurz DCT.
Der Unterschied zu einer DFT, also einer diskreten Fourier Transformation, besteht darin, dass das Signal nicht einfach periodisch sondern gerade fortgesetzt wird [11]. Für eine gerade Fortsetzung werden nur Cosinus Terme benötigt, da die Sinus Terme alle 0 ergeben. Dies folgt direkt aus der Achsensymmetrie einer Cosinus- und der Punktsymmetrie einer Sinusfunktion. Möchte man nun wieder aus den gefundenen Frequenzen das ursprüngliche Signal erhalten, so benutzt man einfach eine *inverse* Transformation. Wenn also aus dem original Lied mit Hilfe von MATLAB einige Frequenzen gestrichen worden sind (siehe Hörmodell), kann das komprimierte Musikstück wieder abgespielt und seine Qualität mit dem Original verglichen werden.

### 3.3.3 Einteilung in Blöcke

In MATLAB wird nicht das gesamte Lied auf einmal transformiert, sondern in eine gewisse Anzahl an gleichlangen Blöcken unterteilt (siehe Abbildung 14). Der Grund für die Aufteilung ist die Tatsache, dass es sich bei den wahrgenommen Frequenzen eines Musikstücks um lokale Frequenzen handelt. Es werden also nicht das gesamte Musikstück und somit globale Frequenzen betrachtet, sondern immer einzelne Blöcke. So können auch nur auf einen gewissen Zeitraum begrenzte, also lokale Frequenzen abgespeichert werden. Die Anzahl der Blöcke wird für jedes Lied neu angepasst. Es muss darauf geachtet werden, dass die Anzahl an Datenpunkten des gesamten Musikstücks ein Vielfaches der Anzahl der Blöcke ist. Ist dies nicht realisierbar, so müssen so viele Datenpunkte vernachlässigt werden, bis die Anzahl durch die Anzahl der Blöcke teilbar ist.

Da ein Lied meist in Stereo aufgezeichnet wird, gibt es zwei verschiedene Tonspuren (zwei Spalten in MATLAB). Auf der einen Spur wird das 'linke' Signal verarbeitet und auf dem zweiten Band das 'rechte'. Jede dieser Spuren wird dann in die gleiche Anzahl an Blöcken unterteilt.
Ein negativer Effekt, der bei der Bildung von Blöcken auftritt, ist der sogenannte *Leck*-Effekt. Durch die gerade Fortsetzung an den Grenzen eines Blocks können Unstetigkeitsstellen auftauchen, da das Eingangssignal an den Grenzen einfach abgeschnitten wird. Wird hierauf dann eine DCT angewendet, so können Frequenzen entstehen, die im original Lied gar nicht vorhanden waren. Diesem Effekt kann entgegengewirkt werden, indem jede Spur zweimal in Blöcke eingeteilt wird. Die eine Einteilung beginnt dann ab der Hälfte des ersten Blocks der anderen Einteilung.
Von jedem Block wird dann die DCT bestimmt und man erhält ein blockweises Frequenzspektrum wie in Abbildung 11 sowohl für die linke als auch für die rechte Spur.

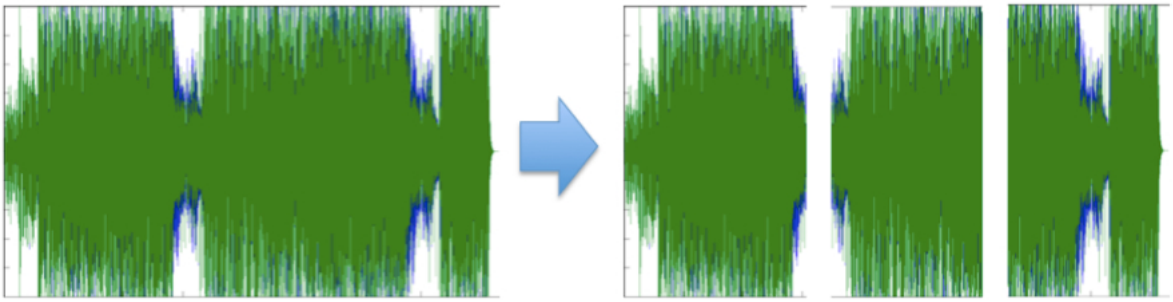

Abbildung 14: Unterteilung des Lieds in äquidistante Blöcke (hier: Amplitude gegen Zeit aufgetragen)

Wenn die Frequenzen blockweise ermittelt wurden, kann auf jeden Block das psychoakustische Hörmodell angewendet werden. Dies wird in MATLAB dadurch realisiert, dass diejenigen Frequenzeinträge in den Blöcken, welche nach den oben genannten Kriterien (zu hoch/tief, simultane-, temporale Maskierung) nicht hörbar sind auf 'Null' gesetzt werden. Dies geschieht auch wieder Block für Block. Der Grund für dieses Vorgehen ist, dass Null- Einträge nicht gespeichert werden müssen und so Platz eingespart werden kann (Komprimierung).
Abschließend können dann die 0-Einträge im linken und im rechten Band addiert und diese Anzahl wiederum durch die Gesamtanzahl von Frequenzen geteilt werden. Dann erhält man eine Aussage darüber, wie stark das Lied komprimiert worden ist.
Beispielsweise würden insgesamt 5 0-Einträge von insgesamt 20 Frequenzen eine Komprimierung von 25% bedeuten.

# 4 Didaktisch-methodisches Konzept

In diesem Kapitel wird das Konzept des entwickelten Lernmoduls beschrieben. Außerdem wird auf die mit den entwickelten Materialien verfolgten Ziele eingegangen.

## 4.1 Ziele des Lernmoduls

Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Lernmodul *Von der Schallplatte bis zum mp3-Player: Wie funktioniert das Komprimierungsverfahren?* verfolgt im Wesentlichen die Ziele, welche bereits unter Abschnitt 2.1.2 als Ziele von CAMMP und in Abschnitt 2.2.3 als Ziele des Modellierens beschrieben wurden. So sollen die SuS in erster Linie die Nutzbarkeit von Mathematik in der realen Welt kennenlernen. Sie sollen die bedeutsame Rolle des mathematischen Modellierens in der Technik, aber auch unmittelbar in ihrem Alltag begreifen. Natürlich sollen auch die Motivation der SuS gefördert und der Spaß daran geweckt werden sich mit mathematischen Problemen auseinanderzusetzen.
Das Lernmodul ist so aufgebaut, dass die Modellierungskompetenzen der SuS gefördert werden, indem sie während des CAMMP days selbständig die einzelnen Schritte des in Abschnitt 2.2.2 beschriebenen Modellierungskreislaufs durchlaufen. Bei der Wahl der dabei zu bearbeitenden Aufgaben wurde besonders auf die Offenheit der Arbeitsaufträge geachtet. Dies soll den SuS ein möglichst freies Vorgehen erlauben und die Heterogenität der Gruppe fördern. Weiterhin soll das Modul so gestaltet werden, dass es die Anwendbarkeit auf verschiedenen Leistungsniveaus ermöglicht. Wie später beschrieben, wurde es daher im Rahmen der *Schüleruni* an einer Lerngruppe mit SuS aus Klasse 8 bis hin zu Einführungsphase getestet.
Am Ende des CAMMP days sollen die SuS das Prinzip des mp3- Komprimierungsverfahrens verstanden haben. Sie sollen wissen, wie Töne mathematisch modelliert und nach welchen Kriterien Töne aus einem Lied gestrichen werden können, um seinen Speicherplatz zu verringern. Außerdem sollten sie mit dem neu gelernten Werkzeug, der Fourieranalyse, umgehen können und seine Rolle innerhalb des Komprimierungsverfahrens kennen.

## 4.2 Aufbau des CAMMP days

Der entwickelte CAMMP day ist von der Struktur her so aufgebaut, dass nach jeder Arbeitsphase der SuS eine kurze Besprechung der Ergebnisse und eine kurze Einführung in den nächsten Arbeitsschritt folgt. Auf diese Weise sollen die Resultate der SuS gesichert und eine klare Rahmenstruktur geschaffen werden. Vor der ersten Arbeitsphase gibt es eine Einführung, welche ungefähr 60 Minuten in Anspruch nimmt. Am Ende des Tages folgt noch eine Nachbesprechung samt Evaluation und kurzem Ausblick. Dieser Teil nimmt ungefähr 15 Minuten in Anspruch. Die reine Arbeitszeit der SuS während der vier Arbeitsphasen beläuft sich auf ungefähr drei Stunden. Inklusive zweier Pausen müssen für den CAMMP day rund sechs Stunden eingeplant werden.

Im Folgenden ist der Ablauf detailliert beschrieben[12]

1. **Begrüßung** | *30 Minuten*
   Im Rahmen der Begrüßung stellen sich die Betreuer des CAMMP days kurz vor und erklären mit Hilfe einer kurzen Präsentation das Konzept und das Angebot von CAMMP. Außerdem hält ein Doktorand oder Professor des Institutes einen Vortrag über das Thema Modellierung. Die SuS erhalten Einblicke in das Forschungsgebiet des Vortragenden und lernen die Rolle mathematischer Modellierung in der Technik kennen.

2. **Problemeinführung** | *30 Minuten*
   Die SuS werden zum ersten Mal mit dem zu lösenden Problem konfrontiert. Die Leitfrage des Tages *„Wie kann der Speicherplatz von Musik reduziert werden?“* wird gestellt und die SuS erhalten einen Einblick in die Geschichte und den Erfolg des Komprimierungsverfahrens. Des Weiteren erhalten sie eine Einführung zum Thema Modellieren von Tönen, die ein Smartphone-Experiment beinhaltet. Am Ende der Problemeinführung erhalten die SuS noch eine kurze Einführung in das Programm MATLAB.

3. **Arbeitsblatt 1: Töne mathematisch modellieren** | *70 Minuten*
   Auf dem ersten Arbeitsblatt sind Aufträge gestellt, anhand derer die SuS kennenlernen, wie Töne mathematisch beschrieben werden können. Dabei variieren sie zunächst die Amplitude einer vorgegeben Sinusschwingung und anschließend auch die Frequenz. Nach jeder Variation wird den Schülern graphisch und akustisch angezeigt, welche Auswirkung die durchgeführte Variation der Amplitude bzw. der Frequenz auf den Ausgangston hat. In der letzten Aufgabe des Blattes werden die SuS schon gewissermaßen zum zweiten Blatt übergeleitet, indem sie mehrere Sinusschwingungen addieren und die resultierenden Töne miteinander vergleichen.
   Nach einer kurzen Pause findet eine Sicherung der Ergebnisse statt, indem einer der SuS die Ergebnisse mit Hilfe des Beamers an seinem Laptop vorstellt. Wie oben beschrieben leitet einer der Betreuer nun unter Verwendung eines Vortrags zur zweiten Arbeitsphase über.

4. **Arbeitsblatt 2: Fourieranalyse** | *45 Minuten*
   Auf diesem Blatt erhalten die SuS das mathematische Werkzeug um aus einem unbekannten Audiosignal das Frequenzspektrum zu ermitteln: die Fourieranalyse. Im Rahmen der Arbeitsaufträge sollen die SuS eigene Dreiklänge erstellen und dann die Dreiklänge anderer Gruppen analysieren. Mit Hilfe von *Dropbox* können sie die unbekannten Dreiklänge der anderen Gruppen auf ihren Laptop kopieren und dann mittels der Fourieranalyse die einzelnen Töne anhand derer Frequenzen herausfinden. Auch hier erhalten die SuS wieder ein akustisches und grafisches Feedback. Sie sollen nach der Bearbeitung des Arbeitsblattes erkennen,

[12]Die in kursiv eingetragenen Zeiten ergeben sich aus der ersten Durchführung des Lernmoduls im Rahmen der Schüleruni vom 17.08.2016

dass die Summation über die herausgefundenen Teiltöne genau den analysierten unbekannten Dreiklang ergibt.
Auch hier findet wieder eine Sicherung der Ergebnisse analog zu Blatt 1 statt.

5. **Mittagspause** | *60 Minuten*
   Nach der Mittagspause erhalten die SuS wieder eine Einführung in das nächste Arbeitsblatt. Diese erfolgt wieder durch einen der Betreuer anhand des Vortrags.

6. **Arbeitsblatt 3: Hörmodell** | *45 Minuten*
   Nachdem die SuS nun alle erforderlichen Vorkenntnisse zum Modellieren von Tönen und dem Herausfinden von Frequenzen gesammelt haben, sollen sie Kriterien festlegen, nach denen ein Musikstück komprimiert werden soll. Auf dem Arbeitsblatt *Hörmodell* testen sie zunächst ihr eigenes Gehör. Die SuS sollen eine untere und obere Grenze für Frequenzen von Tönen finden, welche sie gerade noch wahr nehmen können. Außerdem erhalten sie einen Einblick in das Phänomen der temporalen und simultanen Maskierung. Als letzte Aufgabe des dritten Arbeitsblattes sollen die SuS herausfinden, wie sie an die Frequenzen von zeitlich veränderte Tönen gelangen.[13]
   Auch am Ende dieses Blattes werden die Ergebnisse, wie schon vorher, gesichert und es erfolgt eine Einführung in das nächste Arbeitsblatt.

7. **Arbeitsblatt 4: Das Komprimierungsverfahren** | *60 Minuten*
   Auf dem vierten Arbeitsblatt sollen die SuS nun ihr bisher erworbenes Wissen nutzen und ein Komprimierungsverfahren aus Puzzle-Stücken zusammensetzen. Dazu können sie zwischen verschiedenen .wav-Files wählen und diese dann mit MATLAB komprimieren. Nach jedem Schritt des Verfahrens erhalten die SuS eine Graphik, welche den soeben vollzogenen Arbeitsschritt verdeutlicht. Am Ende des Verfahrens wird dann das original Musikstück abgespielt und anschließend die komprimierte Version. An dieser Stelle haben die SuS den Modellierungskreislauf einmal vollständig durchlaufen. Es wird deutlich, dass die Annahmen verändert werden müssen, da das Ergebnis noch nicht zufriedenstellend ist. Dies geschieht im Rahmen von Aufgabe 2 des vierten Arbeitsblattes. Diese unterteilt sich in zwei verschiedene Schwierigkeitsniveaus, von denen die SuS eines wählen können.
   Am Ende des vierten Blattes werden die Ergebnisse miteinander verglichen und verschiedene Komprimierungseinstellungen der SuS von einem der Betreuer über die Boxen seines Laptops ausprobiert. Auf diese Weise kann herausgefunden werden welche Grenzen einen guten Kompromiss zwischen Qualität und Quantität des Musikstücks darstellen.

8. **Verabschiedung** | *10 Minuten*
   Die Betreuer bedanken sich bei den SuS für die Teilnahme und geben noch Informationen zu den weiteren Angeboten von CAMMP, wie der CAMMP week.

[13] Diese Aufgabe war bei der ersten Durchführung vom 17.08.2016 noch nicht Teil des Moduls und wurde nachträglich auf Grund der Evaluationsergebnisse eingebaut

Außerdem informieren sie über den Studiengang CES und teilen die Evaluationsbögen aus.

## 4.3 Entwickelte Materialien

Wie oben bereits erwähnt sollen die SuS während des Lernmoduls den gesamten Modellierungskreislauf durchlaufen. Dazu wurden vier Arbeitsblätter erstellt, welche ermöglichen, diesen Prozess in einzelne Schritte zu unterteilen. Damit die SuS am Ende des Tages verstehen, wie das mp3-Komprimierungsverfahren funktioniert, müssen zunächst einige Grundlagen und mathematische Werkzeuge vermittelt werden. Dies soll durch die ersten beiden Arbeitsblätter geschehen. Erst dann kann der Fokus auf das eigentliche Komprimieren gelegt werden, was durch die letzten beiden Blättern erarbeitet wird. Um die Heterogenität der Gruppe zu fördern, wurden zu den Arbeitsblättern Hilfekarten erstellt, welche die SuS nach Bedarf einsehen können. Des Weiteren wurden zusätzliche Materialien wie Basic Paper, das methodische Konzept und Lösungsblätter für die Betreuer entwickelt. Diese befinden sich mit Ausnahme des Basic Papers im Anhang.
Da die Evaluation einen wichtigen Bestandteil des CAMMP days darstellt, ist sie auch ein Teil dieser Arbeit. So wurden nach der ersten Durchführung des CAMMP days alle Arbeitsblätter den Resultaten der Evaluation entsprechend überarbeitet. Die überarbeiteten wie auch die ersten Versionen der Arbeitsblätter finden sich ebenfalls im Anhang.
Im Folgenden werden die ersten Versionen der vier Arbeitsblätter genauer betrachtet und auf deren Intentionen näher eingegangen. Eine Analyse der überarbeiteten Versionen ist im Kapitel 5 unter Evaluation zu finden. Außerdem wird der begleitende Vortrag analysiert, welcher immer wieder die Einleitung in einen neuen Arbeitsschritt darstellt. Die entwickelten Materialien werden in der Reihenfolge nacheinander diskutiert, in der sie auch im Lernmodul zum Einsatz kamen.

### 4.3.1 Modellierungsvortrag

Der Modellierungsvortrag wurde nicht im Rahmen dieser Arbeit entwickelt, sondern bereits vorher von Mitarbeitern des CAMMP Teams erstellt. Wegen seiner Relevanz für das Lernmodul soll er jedoch trotzdem kurz vorgestellt werden.
Da die wenigsten SuS zu Beginn des CAMMP days schon wissen, was mathematisches Modellieren bedeutet, führt sie der Vortrag zunächst in dieses Thema ein. Er wird zumeist von einem Doktoranden oder Professor gehalten, welcher an der Organisation von CAMMP beteiligt ist. Der Referent berichtet im Rahmen des Vortrags kurz von seinem Forschungsgebiet und veranschaulicht an einem ausgewählten Beispiel den vereinfachten Modellierungskreislauf aus Kapitel 2.2.2 (s. Abb. 2). Anhand des Vortrags soll den SuS die starke Relevanz mathematischen Modellierens für die Forschung, die Industrie und die Wirtschaft verdeutlicht werden.

### 4.3.2 Begleitender Vortrag (Teil I)

Der begleitende Vortrag stellt gewissermaßen den strukturellen Rahmen des Lernmoduls dar. Er wird zum einen zu Beginn als Einführungsvortrag in das zu lösende Problem benutzt, zum anderen aber auch nach jedem vollendeten Arbeitsschritt der SuS um die Ergebnisse zu sichern und auf den nächsten Schritt vorzubereiten.
Zunächst soll er bis Folie 20 vorgestellt werden. Auf den ersten Folien wird den SuS die Geschichte des mp3-Verfahrens näher gebracht. Sie werden mit Informationen konfrontiert, welche ihr Interesse wecken sollen. So wird beispielsweise darauf eingegangen, dass es sich um eine deutsche Entwicklung handelt, welche Bund und Ländern jedes Jahr 300 Millionen Euro an Steuergeldern einbringen. Außerdem werden die SuS darauf aufmerksam gemacht, dass sie ohne diese Erfindung niemals so viel Musik auf ihrem Handy speichern könnten und immer noch mit Kartons voller CD's oder Kassetten hantieren müssten. Des Weiteren werden die SuS in den Vortrag eingebunden, sie sollen überlegen, wie Töne mathematisch beschrieben werden können und was ihre Charakteristika sind. Dazu wird von den Betreuern ein Smartphone-Experiment durchgeführt:
Mit der App *phyphox*[14] ist es möglich, auf die unterschiedlichen Sensoren eines Smartphones zuzugreifen. Dazu muss der Betreuer die App auf seinem Smartphone starten und auf sein Mikrophon zugreifen. Schlägt er dann eine der vorliegenden Stimmgabeln an und hält sein Smartphone in die Nähe des Resonanzkörpers, so kann der aufgenommene Ton mittels der App, wie bei einem Oszilloskop, als Sinusschwingung dargestellt werden. Die App ermöglicht es außerdem, den Bildschirm des Smartphones direkt über einen angegebenen Link auf einem Computer und somit über einen Beamer anzeigen zu lassen. Auf diese Weise können die SuS live am Beamer beobachten, was das Smartphone aufzeichnet. Anhand der abgebildeten Schwingungen können Begriffe wie Frequenz und Amplitude, welche die Charakteristika einer Schwingung darstellen, verdeutlicht werden. Des Weiteren kann der Betreuer die Bedeutung von Frequenz und Amplitude mittels der App erklären. So kann er unterschiedlich stark gegen die Stimmgabel schlagen, um die Lautstärke und somit die Amplitude zu variieren. Außerdem kann er verschiedene Stimmgabeln anschlagen um die Tonhöhe und somit die Frequenz verändern. Es ist weiter möglich mehrere Stimmgabeln gleichzeitig anzuschlagen, was auch als Überleitung zum zweiten Arbeitsblatt dient.
Bevor die SuS dann mit dem ersten Arbeitsblatt beginnen wird der Modellierungskreislauf speziell bezogen auf das Thema mp3-Komprimierung vorgestellt. Dieser soll den SuS als Orientierung während des Lernmoduls dienen. Das reale Problem stellt die Komprimierung von Musikstücken dar, während die Entwicklung eines einfachen Hörmodells das vereinfachte Problem bildet. Durch das Modellieren von Tönen als Sinusschwingungen kann ein mathematisches Modell erstellt werden. Dieses wird dann mit Hilfe eines mathematischen Werkzeugs, der Fourieranalyse, gelöst. Diese beiden Schritte werden auf den ersten beiden Aufgabenblättern behandelt, welche nun vorgestellt werden.

[14] phyphox wurde am 2. Physikalischen Institut der RWTH Aachen University unter anderem von Sebastian Kuhlen erstellt. Weitere Informationen: http://phyphox.org/de/home-de/

Der Übergang vom begleitenden Vortrag hin zu einem Aufgabenblatt wird im Vortrag immer durch folgende Folie verdeutlicht:

Abbildung 15: Kennzeichen des Übergangs vom begleitenden Vortrag zum einem Arbeitsblatt (hier zu Blatt 1)

### 4.3.3 Arbeitsblatt 1: Töne mathematisch modellieren

Zu Beginn des ersten Aufgabenblattes finden die SuS eine Zusammenfassung der Charakteristika einer Sinusschwingung. Es wird beschrieben, dass der Betrag der Amplitude einer Schwingung für die Lautstärke und die Frequenz einer Schwingung für die Höhe des Tons verantwortlich sind. Diese Übersicht soll als Hilfe dienen, falls die SuS, während sie die Aufgaben bearbeiten, nicht mehr wissen, was die einzelnen Bestandteile der Schwingung bedeuten. Da das Lernmodul auch für SuS der Klasse neun geeignet sein soll, welche gerade erst die Sinusfunktion kennengelernt haben [6], kann die Abbildung auf dem Arbeitsblatt bei Unsicherheiten helfen.
In der anschließenden Aufgabenbeschreibung wird die Intention des Blattes beschrieben und das MATLAB-Skript *Tonmodell.m* benannt, welches für die Bearbeitung des ersten Blattes geöffnet werden muss. Das Skript ermöglicht es den SuS, ihre Ergebnisse nach jedem Schritt zu überprüfen. So können sie die geforderten Änderungen der Amplitude mit der Eingabe *check_*$A_i$ im Command Window akustisch und graphisch wiedergeben lassen. Die geforderten Änderungen der Frequenzen analog mit der Eingabe *check_*$F_i$. Um die Änderungen mit dem vorgegebenen Ton $g(t) = sin(200 \cdot 2\pi \cdot t)$ zu vergleichen können die SuS *Sinuston* im Command Window eingeben und erhalten die Schwingung in akustischer, sowie graphischer Form.
In der ersten Aufgabe soll die Lautstärke des Tons verändert werden. Dazu sollen die SuS zunächst den vorgegebenen Ton $g(t)$ wiedergeben und unter Verwendung der Graphik seine Amplitude bestimmen. Anschließend sollen sie sich überlegen, wie die Amplitude, sprich der Vorfaktor $A_i$ gewählt werden muss, um den Ton leiser, beziehungsweise lauter klingen zu lassen. Des Weiteren sollen die SuS den Ton im vorgegebenen Zeitfenster von sechs Sekunden linear lauter, beziehungsweise leiser werden lassen. Dazu

wurde eine Hilfekarte entwickelt, welche die SuS bei Bedarf einsehen können. Diese enthält eine Abbildung mit verschiedene linearen Funktionen, welche unterschiedliche Steigungen haben. Die SuS sollen auf die Idee gebracht werden, solche linearen Funktionen als Vorfaktor $A_i$ zu benutzen. Eine solche Hilfekarte hat den Vorteil, dass durch ihren Einsatz ein weiterhin selbständiges Arbeiten der SuS gewährleistet wird.
In der zweiten Aufgabe soll nun die Tonhöhe variiert werden. Dies geschieht analog zur Änderung der Amplitude in der ersten Aufgabe. So sollen die SuS zunächst überlegen wie sie den Faktor $F1$ wählen müssen, um den vorgegeben Ton $g(t)$ höher, beziehungsweise tiefer klingen zu lassen. Analog zur ersten Aufgabe wird ihnen die veränderte Schwingung durch die Eingabe von *check_F1* in einer Abbildung mit der vorgegeben Schwingung angezeigt. Die SuS sollen hier feststellen, dass sich die Anzahl der Maxima in einem Intervall um den eingegeben Faktor $F1$ ändert. Auch hier soll am Ende der Aufgabe eine mit der Zeit höher werdende Frequenz erzeugt werden.
Die dritte Aufgabe soll eine Überleitung zum nächsten Aufgabenblatt darstellen, auf dem die Dreiklänge thematisiert werden. In der Aufgabe sollen die SuS einen eigenen Ton erstellen, der sich aus verschiedenen Sinusschwingungen zusammensetzt. Hier ist die Kreativität der SuS gefragt, da sie unter Verwendung verschiedenster Komponenten die unterschiedlichsten Töne erzeugen können. Diese Aufgabe soll ebenfalls dazu beitragen, Spaß an der mathematische Modellierung zu entwickeln. Die SuS können unter der Eingabe von *Eigener_Ton* im Command Window ihren erstellten Ton abspielen.

Abschließend werden die Ergebnisse des Arbeitsblattes im Plenum diskutiert und die neuen Erkenntnisse so gesichert. Dazu wird der Laptop einer Schülergruppe an den Beamer angeschlossen und das bearbeitete MATLAB-Skript von den beiden SuS vorgestellt. Jeder Schritt wird mit dem jeweiligen *check* Befehl überprüft und das akustische sowie graphische Resultat dann im Plenum diskutiert.

Um die Heterogenität der Lerngruppe zu berücksichtigen und auf die verschiedenen Lerntempi einzugehen, wurden vier Zusatzaufgaben entwickelt, welche nach Bedarf durch die Betreuer ausgeteilt werden. Hier werden weitere, schwierigere Aufgaben gestellt, bei denen die SuS abermals Amplitude und Frequenz der Schwingung verändern sollen. Auch hier liegen wieder Hilfekarten aus, welche Abbildungen von Funktionen enthalten, die für die Vorfaktoren angesetzt werden können.

### 4.3.4 Begleitender Vortrag (Teil II)

Nachdem die Sicherung der Ergebnisse des ersten Arbeitsblatts wie oben beschrieben erfolgt ist, stellt einer der Betreuer den begleitenden Vortrag bis Folie 26 vor. Hier wird den SuS der Ablauf des Komprimierungsverfahrens anhand von fünf Schritten vorgestellt. Anschließend erfolgt eine Überleitung von den harmonischen Schwingungen, wie sie auf dem ersten Blatt behandelt wurden, zu den nicht harmonischen Schwingungen, welche auf Blatt 2 thematisiert werden. Dazu wird zunächst ein Bild des Kammertons $a^1$ einer Violine gezeigt. Die SuS sollen so die Unterschiede zwischen harmonischen und

nicht harmonischen Schwingungen erkennen. Daraufhin stellt der Betreuer den Satz von Fourier vor, nachdem jede periodische Funktion als Summe von Sinus- und Cosinusfunktionen dargestellt werden kann. Die daraus resultierende Fourieranalyse stellt das mathematische Werkzeug dar, welches die SuS im folgenden Arbeitsblatt 2 benutzen werden. Zum besseren Verständnis wird im Vortrag die Analogie der Fourieranalyse zu einem Prisma aufgezeigt. Ein Prisma zerlegt Sonnenlicht in seine Spektralfarben, während die Fourieranalyse ein Eingangssignal in seine Einzeltöne zerlegen kann. Die erhaltenen Einzeltöne sind harmonische Schwingungen, deren Frequenz und Amplitude im sogenannten *Frequenzspektrum* dargestellt werden kann. Mit den soeben vermittelten Informationen beginnen die SuS anschließend mit der zweiten Arbeitsphase zum Thema Fourieranalyse.

### 4.3.5 Arbeitsblatt 2: Fourieranalyse

Auf diesem Arbeitsblatt wenden die SuS zum ersten Mal das mathematische Werkzeug der Fourieranalyse an. Während dieser zweiten Arbeitsphase sollen sie erkennen, dass ein Audiosignal aus einzelnen Teiltönen besteht, welche summiert wieder das Eingangssignal ergeben. Um jedoch an diese Teiltöne zu gelangen wird die Fourieranalyse benötigt.
Um den SuS die Relevanz dieses Verfahrens zu verdeutlichen, beginnt auch das zweite Arbeitsblatt wieder mit einem kurzen Infotext, welcher von einem der SuS laut vorgelesen wird. Wie auch auf dem ersten Arbeitsblatt ist hier wieder eine Abbildung implementiert, welche die wichtigen Informationen des begleitenden Vortrags zusammenfasst. Hier werden die einzelnen Schritte einer Fourieranalyse anhand einer sogenannten *Rechteckschwingung* aufgezeigt. Die Aufgaben sollen mit Hilfe des MATLAB-Skripts *Akkordtest.m* bearbeitet werden.
In der ersten Aufgabe sollen die SuS zunächst einen eigenen Dreiklang erstellen. Die dazu benötigten Informationen können sie dem beigefügten Blatt mit den zwei Tontabellen entnehmen. Die eine Tabelle informiert darüber, aus welchen Teiltönen die verschiedenen Dur- beziehungsweise Mol-Dreiklänge bestehen. Die andere Tabelle beinhaltet die Frequenzen zu den jeweiligen Teiltönen. Haben sich die SuS für einen Dreiklang entschieden, so geben sie die drei zugehörigen Frequenzen für $f_1 - f_3$ im MATLAB-Skript ein. Anschließend wählen sie noch einen Gruppennamen und speichern durch Eingabe *Eigener_Dreiklang* im Command Window ihren Dreiklang. Die erhaltene .csv-Datei kopieren die SuS dann in den Dropbox Ordner *Dreiklaenge*, damit die anderen Gruppen im Rahmen von Aufgabe zwei darauf zugreifen können.
Für Aufgabe zwei müssen die SuS zunächst die Dreiklänge der anderen Gruppen aus dem Dropbox Ordner kopieren und in ihren MATLAB Ordner unter *Arbeitsblatt 2* einfügen. Ziel ist, die Teiltöne der Dreiklänge der anderen Gruppen mittels Fourieranalyse herauszufinden. Dazu sollen die SuS zunächst den Namen der jeweiligen anderen Gruppe eintragen, deren Dreiklang sie untersuchen wollen, im MATLAB-Skript eintragen und *Fremder_Dreiklang* im Command Window eingeben. Dadurch wird ihnen der Dreiklang vorgespielt und sie erhalten eine Abbildung der nicht harmonischen Schwingung. Um nun die Frequenzen der einzelnen Teiltöne herauszufinden geben die SuS

*Fourieranalyse* im Command Window ein. Daraufhin erhalten sie eine Abbildung des Frequenzspektrums des Dreiklangs und die darin enthaltenen Frequenzen werden im Command Window angezeigt. Unter Verwendung der oben beschriebenen Tontabellen können sie dann auf die einzelnen Teiltöne und den Namen des Dreiklangs schließen.
Die folgende dritte Aufgabe verfolgt zwei verschiedene Ziele. Zum einen soll sie als Überprüfung der zweiten Aufgabe dienen, zum anderen soll sie ein besseres Verständnis für die Fourieranalyse auslösen. Die SuS sollen die Fourieranalyse am Ende als eine Art Kreislauf verstehen: Aus einem unbekannten Audiosignal, etwa einem Dreiklang, können sie mittels der Fourieranalyse die einzelnen Teiltöne bestimmen, aus denen der Dreiklang besteht. Überlagern sie diese Teiltöne wieder durch einfache Summation, so ergibt sich wieder das Eingangssignal, also der Dreiklang.
Dazu sollen die SuS zunächst die einzelnen Töne in der Form $sin(f_i \cdot 2\pi \cdot t)$ in das MATLAB-Skript eintragen. Durch die Eingabe *Einzelne_Toene* im Command Window erhalten sie eine Abbildung der drei Sinuskurven. Nachdem die SuS die Summe der drei Sinusfunktionen gebildet haben, können sie das Ergebnis der summierten Einzeltöne mit dem untersuchten Dreiklang vergleichen. Dazu wird *Summe* im Command Window eingegeben, was eine Graphik der drei summierten Sinusschwingungen aufruft und den zugehörigen Klang abspielt. Mit Betätigen der *Enter*-Taste wird der untersuchte Dreiklang abgespielt und ebenfalls graphisch angezeigt. Hier sollen die SuS erkennen, dass beide Graphiken sowie die akustischen Signale identisch sind.

Auch hier wurden wieder zwei Zusatzaufgaben implementiert, welche den Schülern, die schnell durch die ersten drei Aufgaben gelangen, die Möglichkeit geben, weitere Erkenntnisse zu gewinnen. Die SuS sollen hier die Amplituden der einzelnen Töne eines Dreiklangs variieren. Anschließend können sie feststellen, dass diese Änderung keine Auswirkungen auf die im Frequenzspektrum abgebildeten Frequenzen hat und lediglich die Höhe der Frequenzpeaks beeinflusst wird.

Die Sicherung der Ergebnisse erfolgt analog zum ersten Arbeitsblatt wieder über den Laptop einer Gruppe, welcher an den Beamer angeschlossen wird. Um feststellen zu können ob alle Dreiklänge richtig identifiziert wurden, legt einer der Betreuer eine Folie auf den OHP auf der die Dreiklänge in einer Tabelle mit den jeweiligen Gruppennamen und den Einzeltönen eingetragen werden können.

### 4.3.6 Begleitender Vortrag (Teil III)

Der dritte Teil des begleitenden Vortrags beginnt damit, die Erkenntnisse des letzten Arbeitsblatts noch einmal zu wiederholen. Die Wiederholung wird eingesetzt, damit die SuS nach der Mittagspause nun wieder leicht in das Thema einsteigen können. Sie sollen sich erinnern, dass es sich bei der Fourieranalyse um eine Art Kreislauf handelt, mit dem sie die Frequenzen eines Audiosignals bestimmen können. Des Weiteren erinnert der vorstellende Betreuer daran, an welchem Schritt des mp3-Komprimierungsverfahrens die Lerngruppe sich nun befindet. So sind die SuS bereits in der Lage, die Teiltöne des Musikstücks herauszufinden, und müssen im Folgenden

die Kriterien festlegen, nach denen einige dieser Teiltöne aus dem Musikstück gestrichen werden können. Um zu betonen, welche wichtige Rolle einige der Teiltöne jedoch spielen, wird ein Vergleich zwischen einem a als einfachem Sinuston und einem a einer Violine gezeigt. Die SuS sollen erkennen, dass die vielen Einzeltöne der Violine ihren charakteristischen Klang ausmachen. Nachdem der begleitende Vortrag bis Folie 32 vorgestellt wurde, geht es weiter mit dem dritten Arbeitsblatt zum Thema Hörmodell.

### 4.3.7 Arbeitsblatt 3: Hörmodell

In einem kurzen Infotext zu Beginn des dritten Arbeitsblatts soll den SuS vermittelt werden, was das Ziel der beiden gestellten Aufgaben ist. Die SuS sollen nach der Bearbeitung des Blatts Kriterien aufstellen können, nach denen Teiltöne aus einem Musikstück gestrichen werden können, um es so zu komprimieren. Eine anschließende kurze Problembeschreibung soll den dabei auftretenden Konflikt zwischen Qualität und Quantität hervorheben. So soll den SuS bewusst werden, dass zwar Speicherplatz eingespart, das Musikstück jedoch nicht bis zu Unkenntlichkeit komprimiert werden soll. Für die Bearbeitung müssen die SuS das MATLAB-Skript *Hörmodell.m* öffnen.
In der ersten Aufgabe sollen die SuS ihre individuelle Hörschwelle testen. Als Orientierung dient die Abbildung zur menschlichen Hörschwelle. Indem die SuS sehr tiefe beziehungsweise sehr hohe Frequenzen einstellen und wiederholt *Gehoertest1*, beziehungsweise *Gehoertest2* im Command Window eingeben, können sie ähnlich wie beim Ohrenarzt testen wie gut sie hören. Die Ergebnisse tragen die SuS in die Übersicht auf der zweiten Seite des Arbeitsblatts ein. Nachdem sie ihre Hörschwelle gefunden haben, sollen sie herausfinden, was mit Teiltönen passiert, welche sie einzeln nicht hören können, die aber dann in einen Akkord gemischt werden. Dazu können sie durch die Eingabe von *Akkord* im Command Window einen vorgegeben Akkord abspielen. Durch Betätigung der *Enter*-Taste wird der gleiche Akkord ein zweites Mal abgespielt, wobei ein zusätzlicher Teilton unterhalb der Hörschwelle eingebaut wurde. Die SuS erhalten die zu den Akkorden gehörigen Frequenzspektren und sollen feststellen, dass der Vierklang und der Dreiklang exakt gleich klingen. Teiltöne, deren Frequenzen unterhalb der Hörschwelle liegen, können in einen Akkord gemischt also auch nicht wahrgenommen werden.
Nachdem die SuS in der ersten Aufgabe bereits zwei Kriterien gefunden haben, um Teiltöne zu streichen, sollen sie nun noch das Phänomen der simultanen Maskierung kennen lernen. Im Unterschied zum letzten Teil der ersten Aufgabe wird einem Dreiklang nun ein zusätzlicher Teilton zugemischt, der einzeln von den SuS wahrgenommen werden kann. Die Frequenz dieses zusätzlichen Teiltons legen die SuS selber fest, sie sollte jedoch in der Nähe einer der Frequenzen des Dreiklangs sein. Unter der Eingabe *Extra_Ton* können sich die SuS den zusätzlichen Teilton akustisch und graphisch wiedergeben lassen. Durch die Eingabe *Sound* können sie sich den Dreiklang aus den vorgegebenen Frequenzen graphisch und akustisch anzeigen lassen. Die graphische Ansicht ist in diesem Fall das Frequenzspektrum des Dreiklangs. Dieses sollen die SuS dann mit dem Frequenzspektrum des Vierklangs vergleichen, indem sie *Sound_Extra* im Command Window eingeben. Bei der Betrachtung der Frequenzspektren soll auf-

fallen, dass der Vierklang die zusätzliche Frequenz des Teiltons zwar enthält, seine akustische Wiedergabe sich jedoch nicht von der des Dreiklangs unterscheidet. Die SuS sollen hier zu dem Schluss kommen, dass ein Teilton, welcher einzeln wahrgenommen werden, kann unter Umständen von lauteren Teiltönen, deren Frequenz in der Nähe des leiseren liegt, verdeckt werden kann.

Auch hier werden die Aufgaben wieder analog zu den ersten beiden Arbeitsblättern besprochen. Eine Besonderheit stellt das Vergleichen der Hörschwellen dar, da sich hier ein kleiner Wettkampf zwischen den SuS entwickeln könnte, wer die besten Ohren hat. Es ist an dieser Stelle zu betonen, dass das Ergebnis für die individuelle Hörschwelle stark von den verwendeten Kopfhörern abhängt. Außerdem ist es der verwendeten Samplingrate von 44.1 $kHz$ geschuldet, dass verwendete Frequenzen von über 30 $kHz$ nicht mehr korrekt wiedergegeben werden. Die Abtastrate der Schwingung reicht dann nicht aus, um die hohe Frequenz darstellen zu können und so wird die eingegebene Frequenz halbiert wiedergegeben.

### 4.3.8 Begleitender Vortrag (Teil IV)

Der begleitende Vortrag nach Arbeitsblatt drei stellt gleichzeitig ein Zwischenfazit dar. Er wird von einem der Betreuer bis Folie 39 vorgetragen und greift zunächst die Ergebnisse der dritten Arbeitsphase auf. So wird den SuS anfangs kurz vorgestellt, wie das menschliche Ohr funktioniert und warum es überhaupt eine Hörschwelle gibt. Anschließend werden die Hörschwellen anderer Lebewesen anhand einer Graphik vorgestellt. Um den Abschnitt zum Hörmodell abzuschließen und die Ergebnisse zu sichern, werden die drei Kriterien noch einmal zusammen mit den SuS festgehalten, nach denen Töne aus einem Musikstück gestrichen werden können. Dies ist möglich, wenn sie zu hoch beziehungsweise zu tief für das menschliche Gehör sind oder aber wenn sie durch andere Töne verdeckt werden. Um zum vierten und letzten Arbeitsblatt überzuleiten, stellt einer der vortragenden Betreuer noch einmal den Modellierungskreislauf vor und gibt an, an welcher Stelle sich die Lerngruppe nun befindet. Die SuS haben nun alle nötigen Vorkenntnisse erworben, um das reale Problem lösen zu können.

### 4.3.9 Arbeitsblatt 4: Komprimierungsverfahren

Auch dieses Arbeitsblatt startet wieder mit einem Infotext, welcher von einem der SuS laut vorgelesen wird. Die Ziele des Blattes, nämlich ein erstes Komprimierungsverfahren aus vier Puzzle-Teilen zusammenzusetzen und dann eine Modellverbesserung vorzunehmen, werden erklärt. Um die Aufgaben bearbeiten zu können müssen die SuS zunächst das MATLAB-Skript *mp3_Verfahren* aufrufen.
In der ersten Aufgabe wählen die SuS zunächst ein Musikstück aus, welches sie im Folgenden komprimieren möchten. Diesen geben sie im Skript ein und bestätigen ihre Eingabe mit *Schritt_1* im Command Window. Sie erhalten ein Bild des eingelesenen Musikstückes und die Bestätigung, dass alles korrekt verlaufen ist. Im Folgenden sollen sie den jeweiligen nächsten Schritt im Command Window eingeben, indem sie einfach

den jeweiligen Namen des blauen Puzzle-Teils auf dem Blatt eingeben. Dieses Vorgehen wurde gewählt, da die SuS zumeist noch nicht mit MATLAB programmieren können. Da die Programme hinter den Befehlsbausteinen jedoch schon vorprogrammiert und als sogenannte *p-Codes* gespeichert wurden, können die SuS diese einfach nutzen und sich ihr Komprimierungsverfahren zusammenbauen. Das nötige Wissen, in welcher Reihenfolge die Teile aneinander gesetzt werden müssen, haben die SuS auf den vorherigen Arbeitsblättern gesammelt. Wenn sie die Schritte korrekt ausgeführt haben, erhalten die SuS am Ende unter Eingabe von *komprimierten_Song_abspielen* zunächst die ersten zehn Sekunden des Originalstücks. Mit Betätigung der *Enter*-Taste wird das komprimierte Musikstück abgespielt. Ein Vergleich der beiden Stücke führt zu dem Ergebnis, dass noch eine Modellverbesserung vorgenommen werden muss, da das Stück zu stark komprimiert wurde.
Diese Modellverbesserung wird im Rahmen der zweiten Aufgabe durchgeführt. Hier wird zwischen zwei verschiedenen Schwierigkeitsniveaus unterschieden, um der Heterogenität der Lerngruppe Rechnung zu tragen. Bei beiden Varianten sollen die SuS verschiedene Grenzen für die Komprimierung ausprobieren. Es gibt bei beiden Methoden eine Grenze, welche die tiefen Frequenzen abschneidet, und eine, welche die hohen Frequenzen abschneidet. Außerdem gibt es eine Größe, welche festlegt, wie viele benachbarte Frequenzen miteinander verglichen werden, um die Maskierung zu berücksichtigen.
Für die leichtere Variante muss nun zusätzlich das MATLAB-Skript *psychoLeicht* geöffnet werden. Hier können die oben beschriebenen Grenzen unmittelbar eingetragen werden. Die SuS sollen verschiedene Grenzen eintragen und dann analog zu Aufgabe 1 verfahren, indem sie wieder mit *Schritt_1* im Command Window beginnen und dann die verschiedenen Puzzle-Teile in der richtigen Reihenfolge eingeben. Für *Hoermodell_anwenden* muss hier lediglich *Hoermodell_leicht_anwenden* benutzt werden.
Für die schwierigere Variante muss das MATLAB-Skript *pschoSchwer* geöffnet werden. Bei dieser Variante werden die SuS in die wirkliche Programmierung von Funktionen bei MATLAB eingeführt. Sie sollen den Umgang mit Listen erlernen und eine kleine *for-Schleife* schrieben. Die SuS, die sich für diese Variante entscheiden geben bei der Zusammensetzung des verbesserten Komprimierungsverfahrens anstelle von *Hoermodell_leicht_anwenden* den Befehl *Hoermodell_schwer_anwenden* im Command Window ein.

Um die Ergebnisse und die unterschiedlich verbesserten Komprimierungsverfahren vergleichen zu können, nimmt einer der Betreuer verschieden Wortmeldungen der SuS auf und trägt deren verwendete Grenzen an seinem Laptop ein, welcher an die Boxen angeschlossen und mit dem Beamer verbunden ist. Auf diese Weise können die verschieden stark komprimierten Musikstücke schnell miteinander verglichen werden.

### 4.3.10 Begleitender Vortrag (Teil V)

Im letzten Teil des begleitenden Vortrags geht einer der Betreuer nochmal auf den Konflikt zwischen Qualität und Quantität ein. Er betont hier, dass es aus diesem Grund

nicht möglich ist zu sagen, welche Gruppe das beste Komprimierungsverfahren entwickelt hat. Schließlich geht er noch kurz darauf ein, dass das originale mp3-Verfahren mittels eines viel komplexeren Hörmodells entwickelt wurde.

## 4.4 Verwendung von MATLAB

Im folgenden Abschnitt soll auf die wichtige Rolle eingegangen werden, welche MATLAB während des CAMMP days einnimmt.
MATLAB wird im Rahmen des CAMMP days zusammen mit einem Laptop als digitales Werkzeug eingesetzt. Die Vorteile, welche ein Einsatz solcher Hilfsmittel mit sich bringt, wurden bereits unter Abschnitt 2.2.4 aufgeführt. Wie in der vorangegangenen Vorstellung der entwickelten Materialien beschrieben wurde für jedes Aufgabenblatt ein MATLAB-Skript entwickelt. Dieses funktioniert wie ein interaktiver Lückentext. Die SuS können die Lösungen ihrer Aufgaben in das Skript eintragen und dann durch die Verwendung von *p-Codes* ihr Ergebnis unmittelbar überprüfen. Auf diese Weise soll die Selbständigkeit der SuS gefördert werden.
Eine der Grundideen von CAMMP ist außerdem, Mathematik als Werkzeug zu betrachten, welches angewendet werden kann, um Probleme zu lösen. Es steht also nicht im Vordergrund, die nötigen Fähigkeiten zu besitzen, um beispielsweise komplexe Gleichungssystem per Hand lösen zu können, sondern ein reales Problem so zu mathematisieren, dass es mit dem entsprechenden Werkzeug gelöst werden kann. Im entwickelten Lernmodul stellt die Fourieranalyse ein solches mathematisches Werkzeug dar. Die SuS sollen eine solche Analyse nicht per Hand durchführen, sondern ihre Funktionsweise verstehen und sie dann mit Hilfe von MATLAB anwenden können.
MATLAB bietet jedoch nicht nur die Möglichkeit Rechenaufwand und somit Zeit einzusparen, sondern kann auch, wie schon beschrieben, als unmittelbare Kontrollmöglichkeit genutzt werden. Dazu nun einige Beispiele:
Vor allem auf den ersten beiden Blättern wurden die *check* Befehle genutzt, um ein akustisches und ein graphisches Feedback der Eingabe in das MATLAB-Skript zu erhalten. Die beiden folgenden Abbildungen 16 und 17 zeigen sehr gut, wie die SuS ihre Lösung selbständig nachprüfen können.

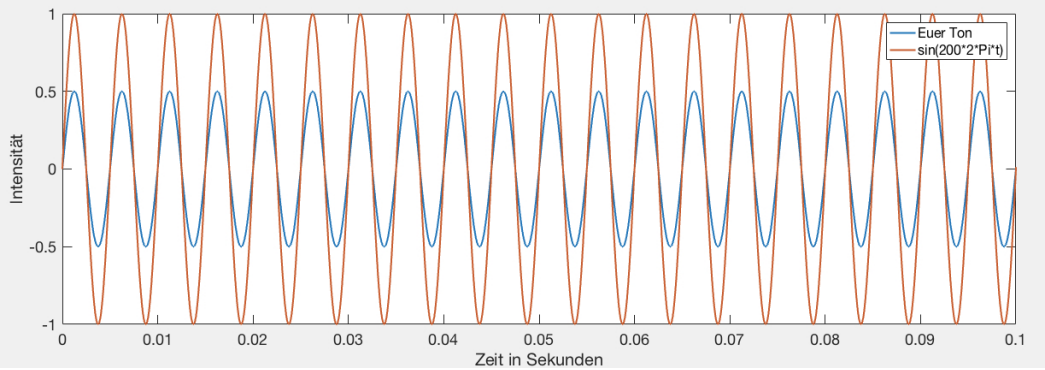


Abbildung 16: Graph aus MATLAB. Aufgetragen ist in orange der vorgegebene Ton $sin(200 \cdot 2\pi \cdot t)$ und in blau der Ton mit geforderter halben Lautstärke

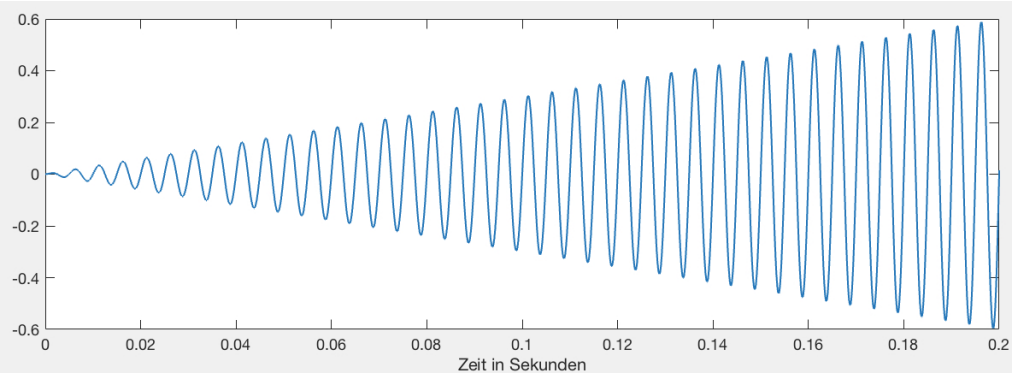


Abbildung 17: Graph aus MATLAB. Aufgetragen ist der vorgegebene Ton $sin(200 \cdot 2\pi \cdot t)$, welcher mit dem Faktor $3 \cdot t$ multipliziert wurde um die Lautstärke linear steigen zu lassen

Die Abbildungen 16 und 17 stammen aus dem ersten Aufgabenblatt. Sie werden den SuS zusammen mit dem akustischen Feedback angezeigt, sobald sie den jeweiligen *check*-Befehl im Command Window eingeben. Sie können leicht überprüfen, ob die Vorgaben erfüllt wurden und nebenbei hilft die graphische Darstellung, die Begriffe Frequenz und Amplitude zu verinnerlichen.
Ein weiteren Vorteil bietet der Einsatz von MATLAB beim vierten Arbeitsblatt. Zunächst können die einzelnen Schritte des Komprimierungsverfahrens schnell und einfach simuliert werden. Nach jedem Schritt erhalten die SuS ein graphisches Feedback und ihnen wird verdeutlicht, was der soeben vollzogene Schritt bewirkt hat. Der Vergleich des originalen Musikstücks mit der komprimierten Version wäre ohne MATLAB nur schwer möglich. Das digitale Werkzeug ermöglicht es, beide Versionen direkt hintereinander abzuspielen und Veränderungen beim Komprimierungsverfahren unmittelbar einfließen zu lassen.
Da die meisten der SuS keine Vorerfahrungen mit der Software haben, wird zu Beginn eine kleine Einführung gegeben. Diese wurde jedoch nicht im Rahmen der Arbeit entwickelt und wird deshalb nicht weiter vorgestellt. Im Folgenden soll noch kurz auf die MATLAB-Skripte, die interaktiven Lückentexte, eingegangen werden. Sie ermöglichen es im Voraus genau die Stelle kenntlich zu machen, an denen die SuS aktiv werden sollen. Solche Stellen sind im Skript mit dem Kürzel $NaN$ für *Not a Number* gekennzeichnet. Die an diesen Stellen eingegebenen Formeln werden in den verwendeten *p-Codes* aufgegriffen. Zunächst soll ein typischer Lückentext abgebildet werden, welcher in dieser Art in allen Blättern verwendet wird. Anschließend wird ein komplexerer Lückentext abgebildet, welcher in Aufgabe zwei des vierten Blatts zum Einsatz kommt.

```
%% Aufgabe 3     Identifizierte Frequenzen

%   a)

% Frequenzen eingeben:
f1 = NaN;
f2 = NaN;
f3 = NaN;


%   Sinusschwingungen

y1 = NaN;
y2 = NaN;
y3 = NaN;

%   b) Summe der einzelne Sinusschwingungen

s = NaN;
```

Abbildung 18: Auszug aus dem MATLAB-Skript *Akkordtest.m*

```
%% Variante 1: schwieriger

function vec = psychoSchwer(v) % v ist eine Sammlung von Frequenzen mit zugehöriger Amplitude

N = length(v);                  % N gibt die Anzahl an Frequenzen von v an: Bsp: v=[1,2,5,6,10] length(v)=5
HHoch = round(N/5);             % HHoch ist der gerundete Wert von N/5: in unserem Beispiel H=5/5=1,
HTief = NaN;                    % Gebe hier eine weitere Rundung für HTief ein

% Schneide zu hohe Toene ab
for TT = 1:HHoch                %TT läuft alle ganzen Zahlen von 1 bis HHoch durch, also 1,2,3,...,HHoch-1,HHoch: im Beispiel nur 1, da HHoch=1
   v(N-TT+1) = 0;               %die obersten HHoch Einträge von v werden auf 0 gesetzt: im Beispiel nur die 10 in v
end

% Schneide zu tiefe Toene ab
for

end

% Negiere benachbarte Toene
dx = NaN;                         % Anzahl der benachbarten Frequenzen die verglichen werden
                                %dx=3 bedeutet, dass nur die nächsten beiden verglichen werden

for TT = (NaN):dx:(NaN) % geht die Frequenzen durch, die noch nicht abgeschnitten wurden
    for JJ = 1:(dx-1)           % JJ geht alle ganzen Zahlen von 1 bis (dx-1) durch
        if v(TT)>1.5*v(TT+JJ)   %falls die Amplitude der nächsten Frequenz (TT+1)
                                %bzw. die Amplitude der übernächsten Frequez (TT+2)
                                % .
                                % .
                                % .
                                %bzw. die Amplitude der zehntnächsten Frequenz (TT+10)
                                % .
                                % .
                                %bzw. die Amplitude der JJ nächsten Frequenz (TT+JJ)
                                %kleiner als 1.5 mal die Frequenz TT ist:
          v(TT+JJ) = 0;         %-> setzte sie auf 0
        end
    end
```

Abbildung 19: Auszug aus dem MATLAB-Skript *psychoSchwer.m*

An den Abbildungen 18 und 19 ist die Vorgehensweise beim Erstellen der MATLAB-Skripte deutlich zu erkennen. So werden in grün jeweils die Arbeitsaufträge auf dem Arbeitsblatt aufgegriffen oder Hilfestellungen wie in Abbildung 19 gegeben. In schwarz ist dann der tatsächliche Code verfasst, wobei die Bezeichnung $NaN$ wie oben beschrieben ein Signal für die SuS ist, dass sie an dieser Stelle eine Formel oder eine Größe einsetzen müssen.

# 5 Durchführung und Evaluation des Moduls

Im Rahmen dieser Arbeit wurde das entwickelte Lernmodul als CAMMP day mit einer Lerngruppe der Schüleruni der RWTH Aachen durchgeführt. Die Durchführung ermöglicht es die entwickelten Materialien zu testen und im Anschluss mögliche Verbesserungen vorzunehmen. Um die Meinungen der SuS zu dem Lernmodul einbeziehen zu können, wurden am Ende des Modellierungstages Evaluationsbögen ausgeteilt, deren Ergebnisse auch in diesem Kapitel diskutiert werden. Außerdem wurden kurze Gespräche mit einzelnen SuS geführt.

## 5.1 Schülergruppe

Die Schülergruppe, welche das Lernmodul am 17.08.2016 getestet hat, setzte sich aus 17 Schülern und 6 Schülerinnen verschiedener Jahrgangsstufen zusammen. Der jüngste Teilnehmer war derzeit in Klasse 8, während die ältesten Teilnehmer in der Einführungsphase zur gymnasialen Oberstufe waren. Hier ist bereits zu bemerken, dass die entwickelten Materialien ursprünglich für die Sekundarstufe II erstellt wurden.

## 5.2 Leitende Gesichtspunkte der Evaluation

Wie schon in der Einleitung zu diesem Kapitel beschrieben haben die SuS am Ende des Lernmoduls einen Evaluationsbogen ausgefüllt. Außerdem hat Jonas Kusch, einer der Korefferenten, den CAMMP day aus der Position eines Schülers miterlebt. Auch sein Feedback soll in der Evaluation berücksichtigt werden. Die leitenden Gesichtspunkte der Evaluation sind an den Evaluationsbogen (siehe Anhang) angepasst und orientieren sich an meinen Beobachtungen während der Durchführung des Lernmoduls. Sie sollen im Folgenden kurz erklärt werden:

- **Motivation und Interesse**
  Waren die SuS interessiert am Thema des Lernmoduls? Konnte ihr Interesse eventuell während des Tages gesteigert werden? Konnten die SuS motiviert werden, sich weitergehend mit dem Thema mathematische Modellierung zu beschäftigen?

- **Verständnis**
  Kennen die SuS, nachdem sie das Modul durchlaufen haben, die Schritte des mp3-Komprimierungsverfahrens? Haben sie verstanden, aus welchen Bestandteilen es sich zusammensetzt und wofür die einzelnen Schritte zuständig sind?

- **Arbeitsblätter**
  Waren die Aufgaben auf den Arbeitslättern klar formuliert und ihr Schwierigkeitsgrad angemessen? Berücksichtigen sie die Heterogenität der Lerngruppe? Inwieweit muss Vorwissen vorhanden sein?

- **MATLAB**
  Hatten die SuS Schwierigkeiten im Umgang mit MATLAB? Konnten die entwickelten Lückentexte den Umgang mit MATLAB erleichtern?

- **Arbeitsweise**
  Haben die SuS eigenständig arbeiten können? Konnten die Hilfekarten helfen oder musste noch oft die Hilfe einer der Betreuer in Anspruch genommen werden?

- **Modellierungskompetenz**
  Konnte das Lernmodul die Modellierungskompetenz der SuS fördern? Konnte den SuS die Relevanz mathematischen Modellierens verdeutlicht werden?

- **Sonstiges**
  Gibt es weitere Beobachtungen negativer oder positiver Art, welche nicht durch die anderen Punkte abgedeckt werden?

Im Folgenden sollen die Beobachtungen und Ergebnisse zu den leitenden Gesichtspunkten dargelegt werden. Anschließend werden noch die Verbesserungen des Lernmoduls beschrieben, welche aus der Evaluation resultieren.

## 5.3 Beobachtungen anhand der leitenden Gesichtspunkte

Zunächst ist zu bemerken, dass die Durchführung des Lernmoduls sehr positiv verlief. Alle erstellten MATLAB-Codes funktionierten reibungslos, sobald die SuS die Eingaben in der Form gemacht hatten, wie sie auf den Arbeitsblättern gefordert war. An dieser Stelle fiel auf, dass Fehlermeldungen bei MATLAB immer dann auftraten, wenn die SuS die Arbeitsanweisungen nicht vollständig gelesen hatten. Doch darauf wird unter dem Punkt *Arbeitsblätter* später noch genauer eingegangen werden. Der zeitlich vorgesehen Rahmen von sechs Stunden inklusive Pausen konnte genau eingehalten werden. Bei der ersten Durchführung dieses Lernmoduls wurde sicherlich von der Durchführung des Lernmoduls zum Thema *Shazam* am 15.07.2016 von Nils Steffen profitiert. Im Rahmen seines Lernmoduls kamen nahezu die gleichen ersten beiden Arbeitsblätter zum Einsatz wie in diesem Modul. Die Arbeitsblätter eins und zwei wurde also bereits schon ein Mal evaluiert und verbessert.[15]
Zu den leitenden Gesichtspunkten:

### Motivation und Interesse

Bei der Bearbeitung der Aufgaben sowie während der Vortragsphasen durch die Betreuer war ein starkes Interesse und eine hohe Aufmerksamkeit bei den SuS zu beobachten. Am Nachmittag, also gegen Ende des Lernmoduls, flachte die Motivation jedoch etwas ab, was sicherlich der langen Aufmerksamkeitsspanne zuzuschreiben ist. Bei der durchgeführten Evaluation gaben fast 90% der SuS an, dass das Lernmodul ihr Interesse an Naturwissenschaften und Technik gesteigert hat. Außerdem interessierten sich nahezu alle SuS für das Thema mp3-Komprimierung. So gaben 14 SuS in der Evaluation ein hohes und 7 SuS ein sehr hohes Interesse an. Lediglich 2 der Teilnehmer setzten ihr Kreuz bei keinem oder gar keinem Interesse. Weiterhin ist zu bemerken, dass viele der

[15] Für genauere Informationen dazu verweise ich hier auf die Bachelorarbeit von Nils Steffen

SuS motiviert werden konnten, sich weiter mit Themen der mathematischen Modellierung zu beschäftigen. So nahmen fast alle SuS am Ende des Tages Infomaterial wie Flyer oder Broschüren über weitere CAMMP Angebote mit.

### Verständnis

Auch die Evaluation dieses Gesichtspunkts fällt stark positiv aus. Das Ziel des Lernmoduls, nämlich den SuS die Ideen und Schritte des mp3-Komprimierungsverfahrens zu vermitteln, konnte erreicht werden. So gaben ausnahmslos alle Teilnehmer auf ihren Evaluationsbögen an, dass sie die Idee hinter dem Verfahren verstanden hätten. Ein ähnlich starkes Ergebnis ergab sich bei der Frage, ob die SuS nun wissen, nach welchen Kriterien ein Musikstück komprimiert werden kann. Lediglich einer der SuS gab an, dass er dies nicht wisse. Alle anderen Teilnehmer haben ihr Kreuz in den oberen beiden Bereichen (+ und ++) gesetzt.

### Arbeitsblätter

Wie schon beschrieben konnte bei der Durchführung des Moduls davon profitiert werden, dass die ersten beiden Arbeitsblätter bereits im Voraus evaluiert und verbessert wurden. Um die Arbeitsblätter angemessen evaluieren zu können, wurden mehrere Fragen dazu in den Evaluationsbogen aufgenommen. Zum einen wurde nach der Verständlichkeit der Aufgaben gefragt. Hierbei ergab die Evaluation, dass 17% der SuS Probleme mit der Verständlichkeit der Arbeitsaufträge hatten. Für den Großteil der Lerngruppe war dies jedoch kein Problem. Ein möglicher Grund für die Verständnisprobleme könnte der hohe Textanteil auf den Blättern darstellen. Der hohe Textanteil führte außerdem dazu, dass die SuS die Aufträge oft nur überflogen und dann Fehlermeldungen in MATLAB erhielten, da die Eingaben nicht wie gefordert durchgeführt wurden.
Das Schwierigkeitsniveau der Aufgaben war für 20 % der Teilnehmer zu einfach. Dies könnte der Tatsache geschuldet sein, das die Materialien zwar ursprünglich für die Oberstufe entworfen, aber dann für die Durchführung vereinfacht wurden. Es liegt nahe, dass die SuS der Einführungsphase den Schwierigkeitsgrad als zu leicht eingestuft haben. Bereits während der Durchführung des Moduls ist aufgefallen, dass einige der SuS die Aufgaben viel schneller lösen konnten als andere. Aus diesem Grund wurden die Zusatzaufgaben entwickelt, mit denen sich die SuS, die schon fertig waren, beschäftigen konnten. Da jedoch immer noch rund ein Fünftel der Teilnehmer die Aufgaben als zu einfach einstufte, wurde eine weitere schwierige Zusatzaufgabe zum Thema Fourieranalyse entwickelt, welche die Heterogenität der Gruppe berücksichtigen soll.
Auf die Frage, ob die Aufgaben zu schwer waren, antworteten nur 2 der 23 Teilnehmer mit *zu schwer* oder *viel zu schwer*. Ich vermute, dass es sich bei dem Teilnehmer, der *zu schwer* angekreuzt hat um den Achtklässler handelt, da in der achten Klasse noch keine Sinusfunktionen behandelt werden. Diese stellen jedoch den Einstieg in den Modellierungstag dar, weshalb er sich bereits hier überfordert gefühlt haben könnte.
Abschließend soll zu diesem Punkt jedoch noch bemerkt werden, dass 22 von 23 Teil-

nehmern die Aufgaben und ihre Lösung bei der gemeinsamen Besprechung verstanden haben. Die Methode der Ergebnissicherung wird also als stark positiv bewertet.

### MATLAB

Zunächst kann auf Grundlage der Evaluationsbögen vermerkt werden, dass lediglich 17% der SuS Probleme im Umgang mit MATLAB hatten. Vor dem Hintergrund, dass keine Vorkenntnisse über diese Software vorlagen, ist dies meiner Meinung nach eine zufriedenstellende Prozentzahl. Die Probleme der SuS konnten immer zusammen mit den Betreuern gelöst werden, weshalb es allen Teilnehmern gelang, die Aufgaben vollständig zu bearbeiten. Was sich sowohl bei der Auswertung der Evaluation, als auch bei Einzelgesprächen mit den SuS herausgestellt hat, ist die Tatsache, dass es oft Probleme gab, die Aufgaben in MATLAB umzusetzen. So gab rund ein Drittel der SuS an, dass sie hierbei kleinere oder größere Schwierigkeiten gehabt haben. In den Einzelgesprächen erwähnten einige die aufgetretenen MATLAB Fehler. Jedoch fiel bereits bei der Bearbeitung der Aufgaben auf, dass diese Fehler immer dann entstanden sind, wenn die SuS die Eingaben anders machten, als auf dem Arbeitsblatt beschrieben. Eine weitere Fehlerquelle war, dass die SuS oft nicht im richtigen MATLAB Ordner zum zugehörigen Arbeitsblatt waren. Diese kleinen Probleme konnten jeodch immer schnell mit Hilfe der Betreuer gelöst werden. Diese Schwierigkeiten könnte in Zukunft vermieden werden, indem eine Übersicht mit typischen MATLAB Fehlern erstellt und den SuS als Zusatzmaterial ausgeteilt wird. Außerdem könnte noch stärker betont werden, wie wichtig es ist die Aufgabentexte vollständig zu lesen.
Ich denke jedoch, dass bei der Durchführung des Moduls immer kleinere MATLAB Fehler auftauchen werden, da im Voraus nie festgelegt werden kann, wie genau die SuS mit MATLAB umgehen. Es ist für sie eine völlig neue Software und durch ihre Neugier probieren sie sich aus. Daraus können Fehler resultieren, welche bei der Konzipierung der Codes überhaupt nicht bedacht werden können. Es kann also nicht Ziel des Moduls sein, dass gar keine Fehler entstehen. Vielmehr sollten die Fehler die entstehen durch die SuS selbst, oder durch die Betreuer korrigiert werden, damit keine allzu große Frustration entsteht.

### Arbeitsweise

Wie eingangs beschrieben haben die SuS sehr diszipliniert gearbeitet. Die Arbeitsweise in Zweiergruppen stellte sich während der Durchführung als hilfreich heraus, da Probleme so zunächst in der Gruppe diskutiert werden konnten, bevor ein Betreuer um Rat gefragt werden musste. Nur einer der SuS gab an, dass er nicht eigenständig arbeiten konnte. Dem Rest ermöglichte die Struktur des Lernmoduls, wie beispielsweise der Einsatz von Hilfekarten, ein völlig eigenständiges Arbeiten.

### Modellierungskompetenz

Eines der wichtigsten Ziele von CAMMP und damit auch dieses Lernmoduls ist die Förderung er Modellierungskompetenzen der teilnehmenden SuS. Sie sollen die Rolle

der Mathematik als angewandte Wissenschaft kennenlernen und ihre Relevanz für viele Berufe erkennen.
Umso positiver ist zu bewerten, dass 20 von 23 SuS nach dem Lernmodul angegeben haben, sie hätten mathematisches Modellieren nun besser verstanden. Auf die Frage, ob die SuS sich vorstellen könnten, ein technisches oder naturwissenschaftliches Studium zu beginnen, antworteten nur 3 Teilnehmer mit nein. Lediglich 4 Teilnehmer würde nicht nochmal einen der CAMMP Workshops besuchen. All diese Antworten lassen darauf schließen, dass das Interesse der SuS an mathematischer Modellierung gefördert werden konnte und ihnen der CAMMP day Spaß gemacht hat.

### Sonstiges

Im Rahmen der Besprechung mit Jonas Kusch, welcher den CAMMP day aus der Schülerperspektive miterlebt hat, konnte noch eine weitere wichtige Erkenntnis gewonnen werden. Was aus der quantitativen Evaluation der SuS nur schwer hervorgeht, konnte Jonas in einer qualitativen Analyse besser feststellen. So ist aufgefallen, dass der Übergang vom dritten zum vierten Arbeitsblatt einen zu großen Sprung darstellt. Konkret geht es darum, dass bis zu diesem Punkt lediglich mit der Zeit konstante Töne in der Fourieranalyse betrachtet wurden. Will man die Fourieranalyse jedoch auf ein Musikstück anwenden, so steht man vor dem Problem, dass sich die Töne mit der Zeit verändern. Unter anderem auch aus diesem Grund ist es notwendig, das Musikstück im Rahmen des Komprimierungsverfahrens in einzelne Blöcke zu unterteilen. Diese Unterteilung in Blöcke, so Jonas, verwirre die SuS bei der Zusammenstellung der Puzzle-Stücke auf Blatt vier. In Folge dessen wird eine weitere Aufgabe zu Blatt 3 hinzugefügt, welche einen besseren Übergang ermöglichen soll.
Was bei der Besprechung positiv auffiel, ist der begleitende Vortrag. Die Struktur, die er dem Lernmodul verleiht, wurde gelobt und es wurde angemerkt, dass so immer erkennbar ist, in welchem Schritt des Modellierungskreislaufs man sich gerade befindet.

Abschließend ist festzuhalten, dass die SuS das Lernmodul sowie die Betreuer auf den Evaluationsbögen mit Schulnoten bewerten sollten. Für die Betreuer ergibt sich im Durchschnitt eine 1,2 und für das Lernmodul eine 1,9. Mit diesen Noten kann durchaus von einer erfolgreichen ersten Durchführung des Moduls gesprochen werden.

## 5.4 Resultierende Verbesserungen des Lernmoduls

Anhand der durchgeführten Evaluation, der Gespräche mit SuS und der Besprechung mit Jonas konnten einige Aspekte festgehalten werden, welche das Lernmodul optimieren würden.
Zum einen muss, wie in Abschnitt 5.3 unter dem Gesichtspunkt *Sonstiges* schon bemerkt, eine weitere Aufgabe auf Arbeitsblatt 3 implementiert werden. Diese soll einen besseren Übergang zu Blatt 4 ermöglichen und den SuS bewusst machen, wozu ein zu komprimierendes Musikstück in Blöcke eingeteilt werden muss. Im Rahmen dieser Aufgabe wird den SuS eine Abfolge von Dreiklängen abgespielt. Wenden sie hierauf

einfach die Fourieranalyse an, so kommen sie nicht zu dem korrekten Ergebnis. Um die einzelnen Frequenzen der Teiltöne herauszufinden, aus denen die unterschiedlichen, hintereinander abgespielten Dreiklänge bestehen, muss die Abfolge in Blöcke unterteilt werden. In jedem Block ist dann nur ein Dreiklang, der analysiert werden kann. Auf diese Weise erhalten die SuS die korrekten Frequenzen und wissen, wie zeitlich veränderliche Töne analysiert werden müssen.
Außerdem wurde ein weiterer Arbeitsauftrag im Rahmen einer Zusatzaufgabe implementiert. In dieser Zusatzaufgabe sollen die SuS eine Fourieranalyse eines Eingangssignals per Hand ausführen. Da ein solches Vorgehen eigentlich Universitätsniveau ist, wurden zusätzliche Hilfekarten und Tipps geschaffen. Zu Beginn der Aufgabe erhalten die SuS kurz eine Einführung in das Thema Fourierreihe. Sie erhalten Formeln zur Berechnung der Koeffizienten $a_0$, $a_k$ und $b_k$. Das zu analysierende Eingangssignal ist eine sogenannte *Sägezahnkurve*. Die SuS erhalten die zugehörige Funktionsvorschrift und den Graphen der Funktion. Anschließend sollen sie die ersten fünf Summanden berechnen und ihre Lösung in MATLAB eintragen. Mit der Eingabe *Fourier* im Command Window erhalten sie eine Abbildung, welche die Sägezahnkurve sowie die graphische Darstellung der eigenen Lösung enthält. Hier dient MATLAB also wieder als Kontrollinstanz, mit der die SuS ihr Ergebnis überprüfen und diskutieren können. Die Zusatzaufgabe schließt sich an das zweite Arbeitsblatt an und verfolgt zwei verschiedene Ziele. Zum einen soll die Heterogenität der Lerngruppe stärker berücksichtigt werden. Zum anderen soll den SuS vor Augen geführt werden, wie nützlich ein digitales mathematisches Werkzeug wie MATLAB ist.
Des Weiteren wurden die MATLAB Plots im Rahmen des vierten Arbeitsblatts verbessert. Hier wurden Schriftgröße, Achsenbeschriftungen sowie verschiedene Farben eingesetzt um den SuS die Inhalte besser vermitteln zu können.

Die veränderten Arbeitsblätter inklusive aller Zusatzmaterialien wie Hilfekarten sind im Anhang dieser Arbeit zu finden.

## 5.5 Zusammenfassung der Ergebnisse

Zusammenfassend sind die erste Durchführung des Lernmoduls, sowie die Entwicklung der benötigten Materialien als positiv und gelungen zu bewerten. Der Kritikpunkt einiger SuS, dass die Aufgaben zu leicht gewesen seien, wurde durch eine Überarbeitung der Arbeitsblätter und zwei zusätzliche Aufgaben aufgegriffen. Die Durchführung hat jedoch gezeigt, dass das Lernmodul auf verschiedenen Niveaus eingesetzt werden kann. So haben SuS vier verschiedener Jahrgangsstufen die Aufgaben vollständig lösen können und die Ideen hinter dem mp3-Komprimierungsverfahren verstanden. Die Hilfekarten machen ein selbständiges und offenes Arbeiten möglich und motivieren die SuS, eigenständig auf die Lösungen zu schließen. Des Weiteren können viele der im Kernlehrplan von Nordrhein-Westfalen verankerten Kompetenzen [6] gefördert werden. Durch das Arbeiten in kleinen Gruppen und das Präsentieren der eigenen Ergebnisse vor der Gruppe wird die Kompetenz *Kommunikation* gefördert. Durch die unterschiedlichen Aufgaben wird die Kompetenz *Problemlösen* gestärkt und verschiedene heuristische

Strategien kommen zum Einsatz. Im besonderen Maße wird natürlich die Kompetenz *Modellieren* geschult. Durch die Orientierung der Modulstruktur am Modellierungskreislauf wird ein starkes Bewusstsein für die mathematische Modellierung geschaffen. Die Ergebnisse der Evaluation unterstreichen dies.
Neben den verschiedenen Niveaus und den geschulten Kompetenzen ist jedoch auch die Vielfältigkeit des Lernmoduls zu betonen. Die SuS arbeiten zwar den gesamten Tag mit den Laptops und der Software MATLAB, jedoch werden immer wieder abwechslungsreiche Elemente eingebaut. Eines von ihnen stellt das Smartphone-Experiment mit der App *phyphox* dar. Es bietet einen spielerischen, entdeckenden Einstieg in das Modul und ermöglicht den SuS, ohne Vorkenntnisse über Schwingungen in den Tag zu starten. Begriffe wie *Amplitude* und*Frequenz* werden direkt mit verschiedenen Sinneserfahrungen verknüpft, sodass sich ihre Bedeutung bei den SuS festsetzt.

# 6 Ausblick

Abschließend soll im Rahmen dieser Arbeit ein Blick auf die zukünftige Durchführung des entwickelten Lernmoduls geworfen werden. Es sollen Aspekte festgehalten werden, welche noch optimiert werden können, und Anregungen gegeben werden, um das Lernmodul weiterzuentwickeln.
Die Durchführung hat gezeigt hat, dass das Modul bereits auf einer sehr großen Breite von Jahrgangsstufen eingesetzt werden kann. So konnten die teilnehmenden SuS der Klassen acht bis hin zur Einführungsphase erfolgreich ein eigenes Komprimierungsverfahren erstellen. Zu bemerken ist jedoch, dass die SuS der achten Klasse Schwierigkeiten hatten, in das Thema einzusteigen. Da die Sinusfunktion noch nicht in der Schule thematisiert wurden, sollte der Einstieg für Lerngruppen unter Klasse neun überarbeitet werden. Eine detaillierte und langsamere Einführung, bei der die SuS sich länger mit dem Sinus Begriff auseinandersetzen können, ist denkbar. So könnte noch mehr Zeit für das Smartphone- Experiment verwendet und eine Aufgabe dazu konzipiert werden. Möglich wäre beispielsweise, dass die SuS Wertetabellen erhalten und daraus die Sinus- Funktion selber zeichnen sollen. Außerdem sollte bei der Durchführung mit derart jungen Schulklassen darauf geachtet werden, dass schwierige Aufgaben wie die schwierigere Variante von Aufgabe 2 auf Blatt 4, oder die Fourieranalyse per Hand gestrichen werden. Auf diese Weise würde der zeitliche Rahmen weiter eingehalten.

Umgekehrt könnten auch noch Aspekte aufgegriffen werden, welche das Modul schwieriger und realitätsgetreuer machen. Diese könnten vor allem dann berücksichtigt werden, wenn das Modul mit einem Leistungskurs durchgeführt wird. Ein Punkt, welcher sich hierfür besonders gut eignet ist die Optimierung des mp3-Verfahrens:
Den SuS könnte auffallen, dass selbst wenn sie die Grenzen für die Komprimierung derart gering wählen, dass quasi gar nichts komprimiert wird, immer noch ein *Knacken* beim bearbeiteten Musikstück zu hören ist. Dieses *Knacken* resultiert aus der Aufteilung des Musikstücks in Blöcke, um die Fourieranalyse anwenden zu können. Bei dem originalen mp3-Komprimierungsverfahren ist ein solches Geräusch jedoch nicht zu hören. Der Grund dafür ist das angesetzte *Windowing*-Verfahren. Bei diesem Verfahren wird eine *Fensterfunktion* angesetzt, welche mit dem eingelesenen Audiosignal multipliziert wird. Daraus resultiert ein kleiner Abschnitt des Musikstücks (ein Block), welcher für die Fourieranalyse einfach periodisch fortgesetzt wird. Genau in dieser periodischen Fortsetzung liegt die Ursache für das *Knacken* [8, S. 819]. Bei den von den SuS entwickelten Komprimierungsverfahren werden Rechtecksfunktionen als *Fensterfunktionen* angesetzt. Werden diese mit dem Audiosignal multipliziert, kann es zu folgendem Problem kommen, das in Abbildung 20 dargestellt wird:

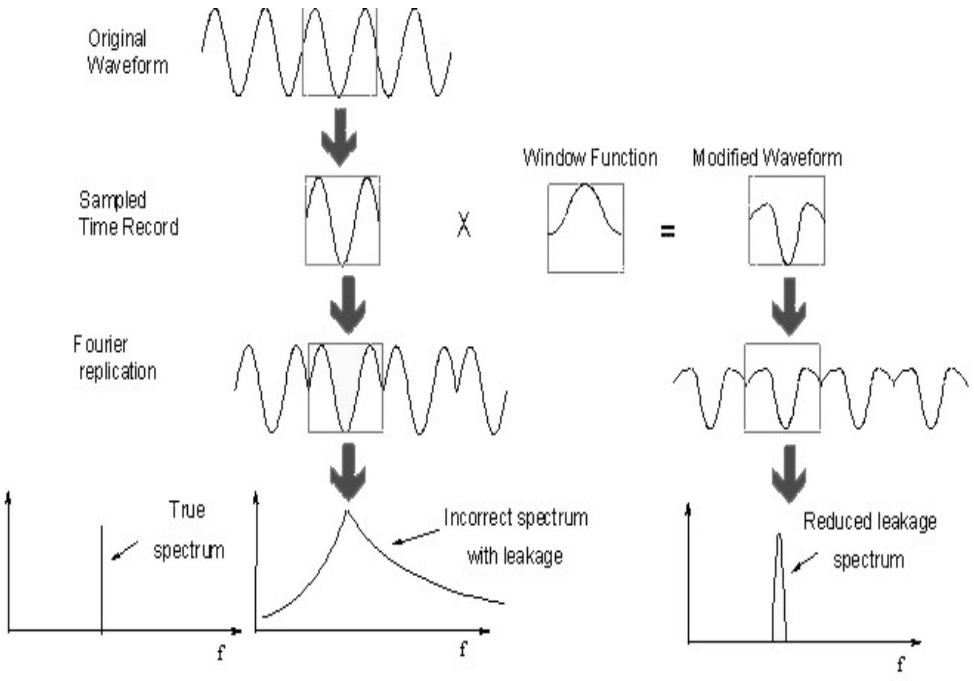


Abbildung 20: links: starke Aufweitung des Frequenzspektrum bei Verwendung einer Rechteckfunktion; rechts: reduziertes Aufweiten durch Einsatz einer Hammingfunktion;[16]

Bei der Windowing-Methode wird davon ausgegangen, dass der Block einfach periodisch fortgesetzt wird, also Anfangs- und Endwert eines Blocks identisch sind. Daraus resultieren Unstetigkeitsstellen an den Blockrändern. Diese Unstetigkeiten sorgen für eine Aufweitung des Frequenzspektrums, den sogenannten *Leck-Effekt* und somit für das *Knacken* bei den bearbeiteten Musikstücken [8, S. 819]. In Abbildung 20 ist diese Unstetigkeit noch gering. Werden die Bereiche, auf welche die Fourieranalyse angewendet wird, wie bei dem im Modul behandelten Verfahren zufällig gewählt, so kann der Effekt noch stärker ausfallen. Hier kann es dann passieren, dass Anfangs- und Endwert eines Blockes unterschiedlich sind. Wird anstelle der Rechteckfunktionen jedoch eine sogenannte *Hammingfunktion* als Fensterfunktion eingesetzt (siehe Abbildung 20, rechts), so kann die Aufweitung reduziert werden [8, S. 819f].
Dieses Phänomen könnte im Rahmen einer weiteren Aufgabe in das Lernmodul aufgenommen werden. In diesem Fall ist das Basic Paper, welches als fachliches Informationsmaterial an die begleitenden Lehrkräfte ausgeteilt wird, um das Kapitel *Windowing* zu erweitern[17].

[16] http://rfmw.em.keysight.com/wireless/helpfiles/89600B/WebHelp/Subsystems/concepts/content/tasks_windowing_of_data.htm Eingesehen: 13.09.2016
[17] siehe Bachelor Arbeit von Nils Steffen

# Literatur


[1] W. Baack. *Mathematisches Modellieren in der Grundschule: Darstellung von Modellierungskompetenzen an ausgewählten realitätsbezogenen Aufgabenstellungen.* BACHELOR + MASTER PUBLISHING, 2015. ISBN 9783958206748.

[2] K. Brandenburg. Mp3 and aac explained. In *17th Intl. Conf. High Quality Audio Coding*, 1999.

[3] R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, and H.G. Weigand. *Handbuch der Mathematikdidaktik.* Springer Berlin Heidelberg, 2015. ISBN 9783642351198.

[4] R.B. Ferri. *Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens: Kognitive Analysen zu Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht.* Perspektiven der Mathematikdidaktik. Vieweg+Teubner Verlag, 2010. ISBN 9783834897848.

[5] R.B. Ferri, G. Greefrath, and G. Kaiser. *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule: Theoretische und didaktische Hintergründe.* Realitätsbezüge im Mathematikunterricht. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2013. ISBN 9783658015800.

[6] Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes NRW. Mathematik. In *Kernlehrplan für das Gymnasium - Sekundarstufe I (G8) in NRW*, 2007.

[7] Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes NRW. Mathematik. In *Kernlehrplan für das Gymnasium - Sekundarstufe II in NRW*, 2013.

[8] A. Friesecke. *Die Audio-Enzyklopädie: ein Nachschlagewerk für Tontechniker.* K.G. Saur Verlag, 2007. ISBN 9783598117749.

[9] G. Kaiser and H.W. Henn. *Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Mathematikunterricht: Festschrift zum 70. Geburtstag von Werner Blum.* Realitätsbezüge im Mathematikunterricht. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2015. ISBN 9783658095321.

[10] Kultusministerkonferenz. *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife*, 2012. Beschluss vom 18.10.2012.

[11] H. W. Lang. *Diskrete Cosinus- Transformation (DCT).* URL: http://www.inf.fh-flensburg.de/lang/algorithmen/fft/dct.htm Eingesehen: 12.09.2016.

[12] D. Leiss and N. Tropper. *Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht: Adaptives Lehrerhandeln beim Modellieren.* Mathematik im Fokus. Springer Berlin Heidelberg, 2013. ISBN 9783642451096.

[13] T. Leuders. *Mathematikdidaktik: Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II.* Cornelsen Scriptor, 2011. ISBN 9783589223787.

[14] F. Miller. *Die mp3-Story: Eine deutsche Erfolgsgeschichte*. Carl Hanser Verlag GmbH & Company KG, 2015. ISBN 9783446444720.

[15] Fachhochschule Technikum Wien. Fourieranalyse. URL: http://www.mathe-online.at/mathint/fourier/i.html Eingesehen: 12.09.2016.

[16] E. Zwicker. *Psychoakustik*. Hochschultext. Springer Berlin Heidelberg, 2013. ISBN 9783642685101.