



Diese Arbeit wurde vorgelegt am Lehrstuhl für Mathematik - MATHCCES

Mathematische Modellierung eines Strahlenfallenreceivers - Entwicklung von Unterrichtsmaterial für den Einsatz in der Sekundarstufe II

Bachelorarbeit in Mathematik

vorgelegt von

Cornelius Hesse-Edenfeld



Erstprüfer:

Prof. Dr. Martin Frank
Department of Mathematics
RWTH Aachen

Zweitprüfer:

Prof. Dr. Johanna Heitzer
Lehr- und Forschungsgebiet Didaktik der Mathematik
RWTH Aachen

Co-Betreuerin:

Dr. Christina Roeckerath
CAMMP EducationLab für Mathematik
RWTH Aachen

Aachen, den 12. April 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation	4
1.1	Ausgangssituation	4
1.2	Ziel der Arbeit	5
1.3	Aufbau der Arbeit	6
2	Didaktischer Hintergrund	7
2.1	Modellieren in der Mathematik	7
2.1.1	Mathematisches Modellieren	7
2.1.2	Modellieren in der Schule	7
2.1.3	Der Modellierungskreislauf	8
2.1.4	Vereinfachter Modellierungskreislauf	9
2.1.5	Ziele des Modellierens im Mathematikunterricht	10
2.2	CAMMP	12
2.2.1	Allgemeines	12
2.2.2	Die Idee und die Ziele von CAMMP	13
2.2.3	Organisation einer CAMMP week	13
3	Modellierung des Strahlenfallenreceivers	15
3.1	Problemstellung	15
3.2	Grundlagen	17
3.2.1	Reflexion	17
3.2.2	Konvektion	18
3.2.3	Emission	18
3.2.4	Struktur des Programms	19
3.3	Lösungsvorschlag	20
3.3.1	Reduzierung des Problems	20
3.3.2	Geometrie der Strahlen und der Oberfläche	22
3.3.3	Energieverluste durch Reflexion	22
3.3.4	Diskrete Berechnung der Energieverluste durch Streuung	27
3.3.5	Konvergenz der Verluste	29
3.3.6	Energieverluste durch Emission	30
3.3.7	Energieverluste durch Konvektion	32
3.3.8	Gesamtverluste und Auswertung	33
3.3.9	Interpretation der Ergebnisse	34
3.3.10	Optimierung des Öffnungswinkels mittels Newton-Verfahren	36
4	Unterrichtseinsatz	38
5	Zusammenfassung	40
5.1	Bewertung der Einsetzbarkeit	40
5.2	Vermittelte Lerninhalte und Kompetenzen	42
6	Ausblick	44

Anhang	45
A. Präsentationen	45
B. MATLAB Codes	59
Eigenständigkeitserklärung	72
Literatur	73
Abbildungsverzeichnis	75

1 Motivation

1.1 Ausgangssituation

Nicht erst seit dem PISA Schock im Jahr 2000 und den Ergebnissen der TIMSS Studie ist bekannt, dass Modellieren sowohl Schülern als auch Lehrern weltweit schwer fällt (vgl. [9], PISA 2000; [12], TIMSS 2007). Dies erscheint umso erstaunlicher, wenn man bedenkt, dass es in der nationalen und internationalen Diskussion der Didaktik der Mathematik seit über 25 Jahren einen breiten Konsens darüber gibt, die Kompetenz des mathematischen Modellierens zu fördern (vgl. [1], Blum, 2007, S. 5; [13], Westermann, 2011, S. 148) oder diese gar einzufordern (vgl. [7], IQB, 2009, S.1). Klar unterscheiden muss man in dieser Diskussion zwischen sogenannten *eingekleideten (Text-)Aufgaben*, deren Intention es ist einen Anlass zur Beschäftigung mit Mathematik zu geben, die auf gerade gelernten Stoff zurückgreifen und bei denen allgemein eine exakte Lösung gesucht wird und tatsächlichen *Modellierungsaufgaben*, bei denen es in erster Linie darum geht ein Realproblem mathematisch in den Griff zu bekommen. Während der erste Aufgabentyp eine reine Konstruktion ist und eine tiefgreifende inhaltliche Auseinandersetzung mit dem Problem häufig nicht nötig ist, um dieses zu lösen, bietet die Modellierung dem gegenüber einige Vorzüge, auf die wir im Folgenden genauer blicken wollen. Blum (2007) führt an, dass mathematische Modellierungen, Realitätsbezüge und Anwendungen eine *Hilfe zum Weltverstehen* für die SchülerInnen sein können. Ebenso unterstützen diese die *Entwicklung von Kompetenzen, adäquaten Einstellungen und Haltungen*, indem sie ein tieferes Verständnis der unterrichteten Themen fördern, und helfen dabei dem gesamten Mathematikunterricht mehr *Sinn* zu geben. Dadurch vermitteln diese Aufgabentypen den Schülern ein *angemessenes (bzw. verbessertes) Bild* von der Mathematik (vgl. [1], Blum, 2007, S. 2). Westermann (2011) ergänzt Blum darin, dass er durch den Realitätsbezug vor allem eine stärkere Motivation bei den Schülern identifizieren kann. Daraus ergibt sich, wie bei Blum, ein tieferes Verständnis und ein wirksameres Begreifen und längerfristiges Behalten von mathematischen Begriffen. Schließlich leisten diese Aufgabentypen damit einen starken *Beitrag zu der Allgemeinbildung und zum Weltverständnis* der SchülerInnen (vgl. [13], Westermann, 2011, S. 149).

Nicht weiter verwunderlich ist vor diesem Hintergrund, dass das Modellieren eine der zentralen geforderten Kompetenzen in den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (vgl. [8], Kultusministerkonferenz, 2003, S. 7) ist. Ebenfalls findet sich die Forderung nach einer adäquaten Modellierungskompetenz auch in den Kernlehrplänen für die Sekundarstufe I und II des Landes Nordrhein-Westfalen (vgl. [10], Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2007, S.12; [11], Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2007, S.15).

Doch warum fällt die Modellierung so vielen Schülern und Lehrkräften schwer? Blum (2007) macht dies im Wesentlichen an den höheren kognitiven Anforderungen fest, die Modellierungsaufgaben im Vergleich zu eingekleideten Aufgaben erfordern. Zusätzlich ist ein außermathematisches Sachwissen erforderlich (vgl. [1], Blum, 2007, S.5; [13], Wester-

mann, 2011, S.151). Eine große Hürde stellt für viele Lehrkräfte die gesteigerte Komplexität und die verringerte Plan- und Vorhersagbarkeit des Unterrichts dar, woraus sich ein erhöhter Vorbereitungsaufwand ergibt. Ein weiterer, häufig genannter Grund ist, dass zu wenig Beispiel- und Unterrichtsmaterial existiere (vgl. [1], Blum, 2007, S. 3). Um dieses Argument zu entkräften seien nur ISTRON-Schriftenreihe¹ und die MUED-Materialien² genannt.

In diesem Kontext setzt das Modellierungsprogramm CAMMP (vgl. Kapitel 2.2) der RWTH Aachen³ an. Hauptanliegen ist, dass die Modellierungskompetenzen und die sich daraus ergebenden Effekte bei den teilnehmenden SchülerInnen gefördert werden. In diesem Rahmen besteht die Möglichkeit an einer Modellierungswoche, auf der umfangreiche, komplexe reale Probleme zu lösen sind, oder an einzelnen Modellierungstagen, bei denen auch reale, aber bereits aufgearbeitete Probleme behandelt werden, teilzunehmen. Die Lösung erfolgt dabei durch Computersimulationen. Die SchülerInnen werden während des gesamten Modellierungsprozesses von Wissenschaftlern begleitet und unterstützt. CAMMP dient daneben auch dazu Lehrkräfte fortzubilden und diesen die Probleme und Vorteile der Modellierung näher zu bringen. Dies soll eine Anregung sein, um mehr reale Probleme und Modellierungspraxis in den Alltagsunterricht mit einfließen zu lassen und ferner den Lehrkräften durch CAMMP ausgearbeitetes Unterrichtsmaterial an die Hand geben zu können.

1.2 Ziel der Arbeit

Die Zielsetzung bei der Erstellung dieser Arbeit ist es, unterrichtsfähiges Material zur Verfügung stellen zu können, mit dem ein reales Modellierungsproblem in der Schule bearbeitet werden kann. In Bezug dazu soll auch das Modellierungsverständnis der betroffenen Lehrkräfte aufgefrischt bzw. verbessert werden, damit das Projekt in einem angemessenen Rahmen durchgeführt werden kann. Für die Umsetzung in der Schule ist in erster Linie nicht an den normalen Fachunterricht gedacht, sondern an alternative Formen, wie Projektunterricht oder Ähnliches, die im Weiteren noch genauer aufgeführt werden.

Als Basis für den Lösungsvorschlag dienen die Ergebnisse der SchülerInnengruppe, die das Problem bereits auf der CAMMP week 2015 gründlich bearbeitet hat. Da bei einem realen und komplexen Problem offensichtlich nicht nur genau eine Lösung existiert, soll die Lösung an geeigneten Stellen auch alternative Möglichkeiten und Ansätze für die Bearbeitung vorstellen. Dabei bietet die Problemstellung im Kontext der Debatte über die Energiewende und die Probleme im belgischen Atomkraftwerk Tihange eine hohe Aktualität. Somit kann das Thema in einem größeren, fächerübergreifenden Kontext behandelt werden und stellt einen Bezug zum Alltag und Leben der SchülerInnen her.

¹Für die ISTRON-Schriftenreihe siehe: <http://userpages.uni-koblenz.de/istron/home>, zuletzt zugegriffen am 06.02.2016.

²Für die MUED-Materialien siehe: <http://www.mued.de/html/index.html>, zuletzt zugegriffen am 06.02.2016.

³<https://www.rwth-aachen.de>, zuletzt zugegriffen am 06.02.2016.

1.3 Aufbau der Arbeit

Im ersten Teil dieser Arbeit, in Kapitel 2.1, liegt der Fokus auf den didaktischen Erkenntnissen zur Modellierung und den Zielen, die bei der Modellierung und einem Alltagsbezug im Mathematikunterricht erreicht werden sollen. Dabei wird zuerst näher auf die zugrunde liegende Didaktik eingegangen. Hierzu werden zwei geeignete Modellierungskreisläufe mit ihren Einsatzmöglichkeiten vorgestellt und deren Vor- und Nachteile erklärt. Des Weiteren wird in Kapitel 2.2 das Konzept von CAMMP vorgestellt, in dessen Zusammenhang diese Arbeit entstanden ist.

Der zweite Teil ist ein hauptsächlich praktischer Teil, der der Lehrkraft eine inhaltliche Hilfe während der Durchführung des Projekts bieten soll. In Kapitel 3 wird ein Lösungsvorschlag für die Aufgabe kleinschrittig beschrieben. Dieser Vorschlag basiert auf den Ergebnissen einer Schülergruppe der CAMMP week 2015 in Belgien. In Anhang B findet sich entsprechend dazu der aufgearbeitete und kommentierte *MATLAB*-Quellcode. Aufgrund der vielen möglichen Herangehensweisen und Lösungswege für das Problem finden sich in der Lösung an vielen Stellen zusätzlich extra gekennzeichnete Alternativvorschläge. Diese sind jedoch nicht weiter mit Quellcodes belegt. Zusätzlich ist in Abschnitt 3.3.5 die Möglichkeit zu einem kurzen Exkurs über Thematik der *Konvergenz* gegeben, um den Schülerinnen und Schülern diesen Begriff zu erklären und die Relevanz in diesem Zusammenhang. Ein weiterer Exkurs ist in Kapitel 3.3.10 zu Optimierungsverfahren gegeben. In Abschnitt 3.3.9 wird das Ergebnis qualitativ diskutiert und anhand der physikalischen Effekte interpretiert.

In Kapitel 4 sind verschiedene Möglichkeiten und Ideen aufgeführt, wie das Projekt in der Schule eingesetzt werden kann. Aufgrund der Komplexität und des Umfangs ist es nämlich nicht möglich dieses in den regulären Fachunterricht einzubringen. Daher sind dort einige Anregungen zu finden, um das Projekt dennoch aussichtsreich umsetzen zu können.

Im zusammenfassenden, vorletzten Kapitel 5 möchte ich das Projekt anhand meiner eigenen Eindrücke und der Meinung der anderen betreuenden Fachkraft während der CAMMP week 2015 reflektieren und bewerten. Dabei soll vor allem auf subjektive Eindrücke und Schwierigkeiten eingegangen werden, die einer durchführenden Lehrkraft während der Umsetzung des Projekts helfen sollen. Außerdem werden in Kapitel 5.2 die vermittelten Lerninhalte und Kompetenzen anhand der Beschlüsse der Kultusministerkonferenz (2003) aufgeschlüsselt.

Zum Schluss wird in Kapitel 6 noch ein kurzer Ausblick zum Projekt und den ausgearbeiteten Materialien gegeben, wie diese eventuell fortgeführt und erweitert werden könnten und welches Potential diese für SchülerInnen und Lehrkräfte bieten.

2 Didaktischer Hintergrund

2.1 Modellieren in der Mathematik

Offensichtlich spielt die Modellierung eine zentrale Rolle bei der Durchführung von CAMMP („Computergestütztes Mathematisches *Modellierungsprogramm*“) und sollte daher vor dem Einstieg in fachspezifische Probleme genauer erörtert werden. In diesem Kapitel sollen die theoretischen und didaktischen Grundlagen der mathematischen Modellierung geklärt werden. Außerdem werden wichtige Begriffe erläutert und zwei Modellierungskreisläufe vorgestellt, die die Basis für den späteren Arbeitsprozess der SchülerInnen sind.

2.1.1 Mathematisches Modellieren

Im Mittelpunkt der Modellierung steht immer das Modell an sich. Dies ist nötig, um die Realität trotz ihrer Komplexität mathematisch beschreibbar zu machen. Die Modellierung, als ein Bereich der angewandten Mathematik, bildet also hinreichende Aspekte der facettenreichen Realität auf ein nachvollziehbar reduziertes Mathematisches Modell ab. Dabei wird versucht das reale Problem so exakt wie nötig, mit so wenig Informationen wie möglich zu beschreiben, um damit ein zufriedenstellendes Ergebnis zu erzielen. Somit ist ein Modell eine „vereinfachende, nur gewisse, hinreichend objektivierbare Teilaspekte berücksichtigende Darstellung der Realität“ ([4], Greefrath, 2013, S. 12). Der Fokus liegt bei der Modellierung also auf dem „*Prozess* des Lösens von Problemen aus der Realität“ (vgl. [4], Greefrath, 2013, S. 11). Auf derartig erstellte mathematische Modelle lassen sich nun mathematische Methoden und Strategien anwenden, mit denen man ein mathematisches Ergebnis erhält, welches der Beschreibung der Realität dienen kann. Diese Modelle sind jedoch nicht eindeutig, sondern sind vom jeweiligen Vereinfachungs- bzw. Erstellungsprozess und von der angestrebten Verwendung abhängig.

Offensichtlich ist eine exakte Beschreibung der Realität nicht möglich, sodass der Modellierung durch die geforderte Reduktion bereits Grenzen gesetzt sind. Jedoch ist diese insofern nützlich und sogar erwünscht, da die Realität gar nicht in ihrer gesamten Komplexität erfasst werden soll, sondern Modelle vorrangig dazu dienen, Daten und Informationen aus der Realität, möglichst schnell zu verarbeiten (vgl. [4], Greefrath u.a., 2013, S. 13).

2.1.2 Modellieren in der Schule

Der heutige nationale und internationale Konsens, dass Modellierung und Anwendungsbezug ein zentraler Bestandteil des Mathematikunterrichts sein sollen, reicht bis weit in die 70er Jahre des vergangenen Jahrhunderts zurück. Einen Aufschwung erlebte die Thematik durch das 1968 durchgeführte Symposium von Hans Freudenthal: „Why to teach mathematics so as to be useful“. In den 1990er Jahren fand diese auch vermehrten Einzug in die Kernlehrpläne und Bildungsstandards für den Mathematikunterricht in Deutschland, der bis heute anhält. So ist mathematisches Modellieren eine der sechs

zentralen Kompetenzen, die im Beschluss der Kultusministerkonferenz von 2003 aufgeführt wird (vgl. [8], Kultusministerkonferenz, 2003, S. 8). Einen ebenso essentiellen Stellenwert nimmt die Modellierungskompetenz, als ein in der Schulzeit von den SchülerInnen zu erwerbende prozessbezogene Kompetenz, in den Kernlehrplänen des Landes Nordrhein-Westfalen ein (vgl. [10], Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2007; [11], Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2014).

Die Kompetenz mathematisch zu modellieren kann allgemein als die Fähigkeit verstanden werden, die es dem Menschen ermöglicht zwischen Realität und Mathematik bidirektional *übersetzen* zu können. Blum (2007) beschreibt es als die Fähigkeit Teilschritte des Modellierens *problemadäquat* ausführen zu können und so erstellte Modelle *analysieren* und *vergleichen* zu können. An Abb. 1 orientiert lassen sich die Teilkompetenzen wie folgt benennen: *Verstehen*, *Vereinfachen/Strukturieren*, *Mathematisieren*, *Interpretieren*, *Validieren*, *Vermitteln*. Mathematisch arbeiten zählt verständlicherweise nicht als Teilkompetenz des Modellierens. Diese Teilschritte oder -kompetenzen werden im folgenden Abschnitt genauer erklärt.

2.1.3 Der Modellierungskreislauf

Aufgrund der großen Zahl an unterschiedlichen Modellierungskreisläufen soll sich hier auf zwei wesentliche beschränkt werden, anhand derer der gesamte Prozess des Modellierens aufgeschlüsselt werden soll. Die Darstellung der Modellierung als Kreislauf ist ebenfalls wieder ein Modell der mathematischen Modellierung (vgl. [4], Greefrath, 2013, S. 14). Der in diesem Kapitel näher betrachtete Kreislauf nach Blum und Leiss (siehe Abb. 1) ist im Kontext des DISUM-Projekts entwickelt worden und wird vor allem zu diagnostischen Zwecken herangezogen, um eventuelle Probleme der SchülerInnen verstehen und beheben zu können. Im nächsten Kapitel wird ein vereinfachter Kreislauf vorgestellt, der auch den SchülerInnen eine Hilfe während des Modellierens sein soll.

Bei dem hier betrachteten Kreislauf wird die Erstellung des Modells besonders detailliert analysiert und beschrieben. Dies hat den Vorteil, dass gezielter auf Probleme der Lernenden bei diesen Schritten eingegangen werden kann. Jedoch soll der gesamte Kreislauf im Folgenden von Anfang an erläutert werden. Wie bei jeder Modellierungsaufgabe steht an erster Stelle die Realsituation, also ein zu lösendes Problem in der Realität. Der erste Schritt, den die SchülerInnen zu vollziehen haben, ist es das Problem zu *verstehen* und damit auf ein Situationsmodell abzubilden, welches eine mentale Repräsentation der Aufgabe und deren Eigenschaften darstellt (vgl. [4], Greefrath, 2013, S. 17). Ist das Problem verstanden und die Aufgabenstellung klar, wird im nächsten Schritt ein Realmodell erstellt, welches die komplexe Realsituation auf Sachebene, noch ohne mathematischen Charakter, auf die wichtigen Informationen reduziert. Als drittes folgt der Wechsel von der Umwelt in die Mathematik. Dafür müssen notwendige reale Sachverhalte mathematisch beschrieben werden, also die Realität in die Mathematik *übersetzt* werden. Das Ergebnis dieses Schritts ist das zentrale mathematische Modell, das richtungsweisend für die nächsten Schritte ist. Mit diesem wird im vierten Schritt gearbeitet, in dem bekann-

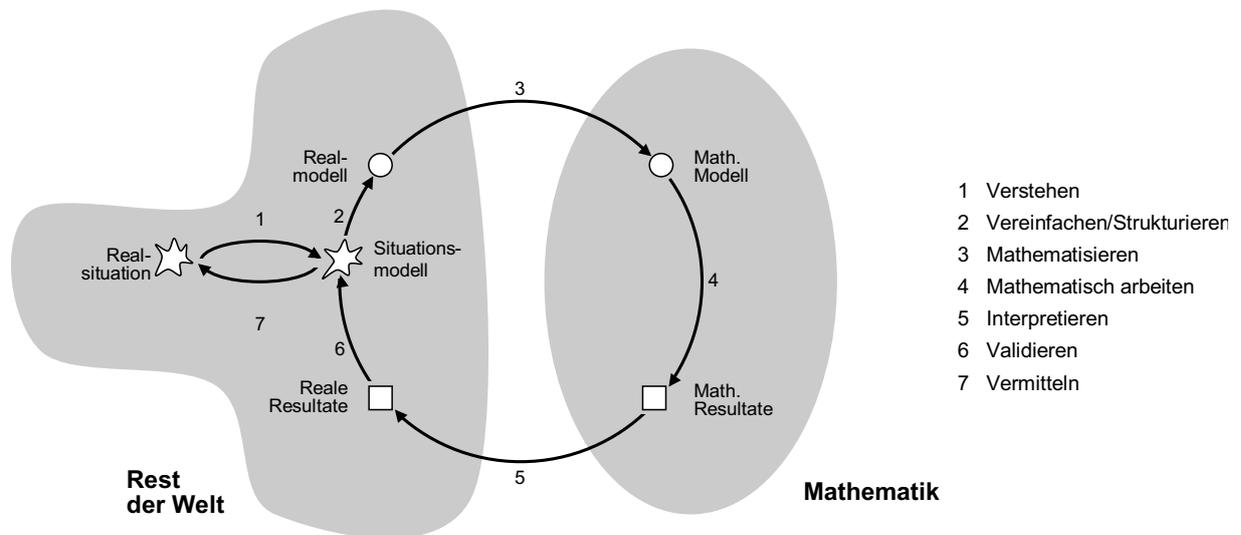


Abb. 1: Modellierungskreislauf nach Blum und Leiss [Quelle: [2], Blum, 2006, S. 9]

te mathematische Mittel, Strategien und Arbeitsweisen darauf angewandt werden, die die Fragestellung beantworten bzw. hinreichend beschreiben können. Die sich hieraus ergebenden mathematischen Resultate müssen nun in Schritt fünf im Bezug auf das Problem interpretiert und damit in die Realität *übersetzt* werden. Die sich daraus ergebenden realen Resultate müssen in Schritt sechs noch *validiert* werden. Das bedeutet, dass die übersetzten Ergebnisse anhand des erstellten Situationsmodells auf Sinnhaftigkeit und Angemessenheit überprüft werden müssen. Machen die Resultate im Hinblick auf das eigene Verständnis der Aufgabe Sinn, also auf das Situationsmodell, werden diese in einem letzten Schritt wieder auf die Realsituation bezogen und für die Lösung des Problems herangezogen, um damit die Fragestellung zu beantworten. Ergibt sich allerdings kein Sinn aus den Resultaten, wird der Kreislauf wieder von vorne begonnen und die bereits durchgeführten Schritte noch einmal auf Fehler oder Ungenauigkeiten überprüft und bestenfalls nur überarbeitet oder aber jeweils neu erarbeitet.

2.1.4 Vereinfachter Modellierungskreislauf

Im Vergleich zu dem Modellierungskreislauf nach Blum, kommt der Kreislauf nach Ortlieb (siehe Abb. 2) deutlich vereinfacht, mit nur vier Schritten aus. Das macht ihn zu einem guten Hilfsmittel zur Orientierung bzw. einem Leitfaden, der den Lernenden vorgestellt werden kann. Nicht eingezeichnet, aber ähnlich wie bei Blum, lässt sich dieser auch in Mathematik (die obere Hälfte der Abbildung) und Rest der Welt (untere Hälfte) einteilen. Die Ausgangssituation ist dieselbe, dass ein reales Problem besteht, das

es zu lösen gilt. Im ersten Schritt wird hier jedoch die direkte *Modellbildung*, also das Strukturieren, Vereinfachen und *Übersetzen* in die Mathematik, gefordert. Dies wird in der Abbildung Modellierung genannt, was aber irreführend sein kann, da heutzutage der gesamte Kreislauf als Modellierung bezeichnet wird (vgl. [4], Greefrath, 2013, S. 16). Offensichtlich ist das Verständnis des Problems auch hierbei erforderlich, aber nicht einzeln aufgeführt, um den Kreislauf nicht zu komplex werden zu lassen. Ist das Problem *mathematisiert*, also aus dem realen ein mathematisches Problem gemacht worden, kann mit diesem die Simulation und Analyse mit innermathematischen Mitteln durchgeführt werden. Die daraus resultierende Lösung muss interpretiert, also wieder in die Realität *übersetzt* werden, um damit eine reale Lösung zu erhalten. Diese Lösung oder Beschreibung eines Phänomens wird jetzt anhand der Ausgangssituation validiert und auf Sinnhaftigkeit überprüft. Leicht ersichtlich ist, dass dieser Kreislauf sich nicht unbedingt für diagnostische Zwecke eignet, dafür aber umso besser von Lernenden genutzt und in den Unterricht eingebunden werden kann.

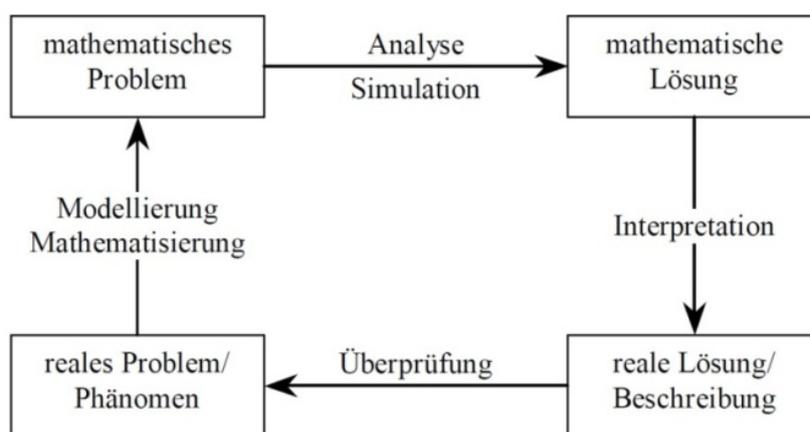


Abb. 2: Vereinfachter Modellierungskreislauf nach Ortlieb [Quelle: [4], Greefrath, 2013, S. 16]

2.1.5 Ziele des Modellierens im Mathematikunterricht

„Erst das Hin und Wieder zwischen Wissenschaft und Wirklichkeit in beiderlei Richtung erschöpft die Aufgabe, die im materialen Zweck der Mathematik liegt. Ebenso wichtig wie die Anwendung einer mathematischen Tatsache auf die Wirklichkeit, aber ungleich schwerer ist die Aufgabe, in der Wirklichkeit das mathematische Problem zu sehen.“ (Lietzmann, 1919, zitiert nach [4], Greefrath, 2013, S. 19). So wurden bereits vor fast 100 Jahren die Relevanz und die Probleme des Modellierens, ohne den Begriff explizit zu benutzen, beschrieben. Auch heute ist die Aktualität der anwendungsbezogenen Mathematik ungebrochen, daher sollen im Folgenden die gegenwärtig definierten Ziele für den Mathematikunterricht ausgeführt werden:

- Allgemeine Ziele:

Im allgemeinen soll das Modellieren im Unterricht den SchülerInnen ein ausgewogenes Bild der Mathematik vermitteln und ihnen beim Verständnis der Kultur unserer heutigen Gesellschaft helfen, da die Mathematik essentielles Werkzeug in einer demokratischen Gesellschaft ist. Die SchülerInnen sollen zu mündigen Bürgern erzogen werden, die sich unter Zuhilfenahme von mathematischen Mitteln kritisch mit alltäglichen Problemen auseinandersetzen und eigenständig ein ausgewogenes Urteil darüber bilden können. Dies ist ein wichtiger Schritt auf dem Weg ein verantwortungsvolles Mitglied der Gesellschaft zu werden (vgl. [4], Greefrath, 2013, S. 20).

- Inhaltsbezogene Ziele:

Die inhaltsbezogene Zielsetzung umfasst vor allem die pragmatische Ansicht, dass die SchülerInnen durch die Auseinandersetzung mit Modellierungsproblemen und Aufgaben mit Anwendungsorientierung die Fähigkeit erlangen sollen, „die Umwelt mit mathematischen Mitteln zu erschließen“ ([4], Greefrath, 2013, S. 20). Diese Forderung deckt sich mit der ersten der drei *Grunderfahrungen* des Mathematikunterrichts nach Winter (vgl. [14], Winter, 1995).

- Prozessbezogene Ziele:

Unter prozessbezogenen Zielen ist vor allem die Vermittlung von *Problemlösefähigkeiten* zu verstehen. Damit ist das Erlernen und die Kenntnis von bestimmten *heuristischen Strategien* gemeint, die während des Modellierungsprozesses nützlich sein können. Die SchülerInnen sollen dabei erkennen, dass Probleme auf verschiedenen Wegen mit unterschiedlichen Strategien zufriedenstellend gelöst werden können. Ebenso fördert und erfordert eine erfolgreiche Gruppenarbeit an komplexen Problemen eine hohes Maß an Argumentations- und Kommunikationskompetenz (vgl. [13], Westermann, 2011, S. 148.f). Allgemein entsprechen die prozessbezogenen Ziele der dritten der *Grunderfahrungen* des Mathematikunterrichts von Winter (vgl. [14], Winter, 1995).

- Lernpsychologische Ziele:

Zu den lernpsychologischen Zielen gehört eine gesteigerte *Motivation* der SchülerInnen, welche einerseits durch die Anwendungsorientierung, vor allem aber durch das Erleben der eigenen Fähigkeiten und eines guten Unterrichtsklimas erreicht wird (vgl. [13], Westermann, 2011, S. 148.f). Außerdem wird durch die konkrete Anwendung mathematischer Inhalte auf reale Situationen das Verstehen und Behalten dieser Inhalte deutlich verbessert.

2.2 CAMMP

2.2.1 Allgemeines

Die Abkürzung CAMMP⁴ steht für **C**omputational **A**nd **M**athematical **M**odeling **P**rogramm und ist ein von der RWTH Aachen veranstaltetes mathematisches Schülerlabor. Das zu Deutsch „Computergestützte Mathematische Modellierungsprogramm“ wird vom Lehrstuhl Mathematik CCES (Prof. Dr. Martin Frank, Dr. Christina Roeckerath), der Graduiertenschule AICES (Dr. Nicole Faber) und der Arbeitsgruppe Molecular Simulations and Transformations (Prof. Dr. Ahmend E. Ismail) organisiert. Dabei werden zwei Veranstaltungsformate angeboten, CAMMP day und CAMMP week, die den SchülerInnen, aber auch den Lehrkräften, die computergestützte Lösung von mathematischen Fragestellungen näher bringen und deren Einsatz bei realen Problemen aufzeigen soll. Diese beiden Formate sollen im Folgenden kurz erläutert werden.

Die CAMMP week ist eine mathematische Modellierungswoche nach dem Vorbild der seit 1993 stattfindenden Modellierungswochen der Arbeitsgruppe Technomathematik der Technischen Universität Kaiserslautern. Dabei fahren SchülerInnen der Sekundarstufe II von Montag bis Freitag in eine Jugendherberge, die im näheren Umkreis der RWTH Aachen liegt, um sich dort mit realen Problemstellungen zu beschäftigen. Diese Probleme sind aktuelle Fragestellungen aus der Forschung von Unternehmen oder Instituten der Universität. Dabei gibt es keine Musterlösung oder Ansätze, sondern die SchülerInnen sollen selbst in kleinen Gruppen von maximal 6-7 Personen eine Lösung erarbeiten. Zur Unterstützung stehen pro Gruppe ein Wissenschaftler und zwei Lehrkräfte zur Verfügung, die sich aber größtenteils im Hintergrund halten und die Gruppen selbstständig arbeiten lassen sollen. Zum Abschluss der Modellierungswoche findet eine Präsentationsveranstaltung vor Vertretern der Unternehmen, Instituten und der RWTH Aachen statt, bei der die Ergebnisse der Gruppen auf wissenschaftlichem Niveau präsentiert werden. Weitere Beispiele, neben der in dieser Arbeit bearbeiteten Fragestellung, die bereits bearbeitet wurden, sind beispielsweise *Optimierung des Buchungssystems einer Carsharing-Firma* und *die Messung der Geschwindigkeit mithilfe einer Handykamera*.

Ein CAMMP day ist im Gegensatz zur CAMMP week, wie der Name schon sagt, nur ein einzelner Tag, an dem eine Fragestellung bearbeitet wird. Dabei kommen Mathematikurse der Mittel- und Oberstufe mit ihren Lehrkräften an die RWTH Aachen, um dort, betreut und unterstützt von Wissenschaftlern, an praxisnahen Problemstellungen zu arbeiten. Zur Durchführung werden die SchülerInnen in kleine Gruppen aufgeteilt, in denen sie die realen, herausfordernden Aufgaben lösen sollen. Die gegebenen Probleme sind, um eine zufriedenstellende Lösung, trotz eines geringen Zeitumfangs, sicherzustellen, bereits methodisch-didaktisch ausgearbeitet. Derzeit werden unter anderem CAMMP days zu *Wie funktioniert eigentlich Google und was hat das mit Mathe zu tun?* und *Spiegelaufstellung in einem Solarkraftwerk* angeboten.

⁴www.cammp.rwth-aachen.de, zuletzt zugegriffen am 18.02.2016.

Bei der Erarbeitung der Lösungen beschäftigen sich die SchülerInnen mit Computersimulationen und mathematischen Methoden und Modellen. Damit bietet CAMMP den SchülerInnen nicht nur einen Einblick in die rein mathematische Modellierung, sondern auch einen Einblick in die Arbeit von Informatikern, Ingenieuren und (Berufs-)Mathematikern im Allgemeinen.

2.2.2 Die Idee und die Ziele von CAMMP

Die grundlegende Idee hinter CAMMP ist es, Mathematik losgelöst vom Unterricht zu betrachten und anzuwenden. Dabei geht es nicht nur um fachliche Zusammenhänge, sondern auch den grundsätzlichen Umgang zwischen SchülerInnen und Lehrkräften, bei dem beide Seiten voneinander lernen können. Dies soll auf eine sehr zwanglose Weise, also ohne Bewertungsdruck, geschehen und damit die Relevanz der Mathematik im Alltag verdeutlichen und andere Zugänge zu Problemen aufzeigen. Auf diese Weise soll CAMMP auch eine Orientierungshilfe für die Berufs- und Studienwahl der SchülerInnen sein und ihnen ein mathematisch/technisches Studium attraktiv machen. So haben diese auch die Möglichkeit während der Durchführung sich mit den Aufgabenstellern auszutauschen und nach CAMMP einen weiteren Einblick in den Alltag und das Aufgabenspektrum eines Unternehmens oder Instituts zu bekommen.

Eine weitere Idee in diesem Zusammenhang ist, dass dank eines freien Umgangs mit der Mathematik neue didaktische Prinzipien und Methoden erforscht werden können. Dadurch ist eine stete Weiterentwicklung von CAMMP gegeben und kann als Lehr-Lern-Labor verstanden werden. In diesem Rahmen haben die Lehrkräfte eine Möglichkeit für ihre Aus- und Fortbildung, auch mit dem Ansatz, dass sie sich in einer ungewohnten Rolle wiederfinden.

Vor allem aber soll CAMMP allen Beteiligten Spaß machen und sie für die Mathematik und ihre speziellen Probleme begeistern.

2.2.3 Organisation einer CAMMP week

Da diese Arbeit im Rahmen der CAMMP week 2015 entstanden ist, soll in diesem Kapitel kurz die Organisation einer CAMMP week beschrieben werden. Dies kann als Hilfe für die Planung des im Weiteren beschriebenen Projekts dienen. Andere Vorschläge und Ergänzungen finden sich in Kapitel 4.

An einer CAMMP week können mathematisch interessierte OberstufenschülerInnen und an einer Fortbildung interessierte Lehrkräfte und ReferendarInnen teilnehmen. Anders als beim CAMMP day nehmen jedoch nicht komplette Kurse einer Schule teil, sondern ausgewählte SchülerInnen von verschiedenen Schulen. Dadurch entsteht eine gemischte Teilnehmergruppe, die sich zwar erst einmal kennen lernen muss, doch entwickeln sich damit eine ganz andere und häufig sehr gewinnbringende Gruppendynamik. Darauf wird auch bei der Gruppeneinteilung zurückgegriffen, bei der SchülerInnen von

mehreren verschiedenen Schulen in einer Kleingruppe von 6 Personen zusammenarbeiten. Den Gruppen wird vom Veranstalter eine Problemstellung zugeteilt, welches zusammen mit einem Wissenschaftler bearbeitet wird. Einige Beispiele für solche Problemstellungen sind:

- Wie sollten die Spiegel in einem Solarkraftwerk aufgestellt werden, so dass möglichst viel Strom erzeugt wird?
- Wie kann man das Buchungssystem einer Carsharing-Firma verbessern?
- Welche Berechnungen und Simulationen muss man vornehmen, um ein möglichst gutes Knochenimplantat für einen Unfallverletzten zu entwickeln?
- Wie lassen sich verschiedene Bauteile im Auto designen, so dass sie günstig und stabil sind?
- Kann man mit Hilfe einer Handykamera Geschwindigkeiten messen?
- Wie kann die Steuerung von Personenaufzügen optimiert werden?

Die Teilnehmer und Veranstalter treffen sich an einem Montagmorgen in der Jugendherberge Voeren in Belgien, in der sie bis freitags bleiben und das Problem bearbeiten können. Die erste gemeinsame Handlung nach der Zimmereinteilung ist eine Einführung in das Projekt und die Didaktik der Modellierung. Danach werden die realen Probleme bzw. Aufgaben von den betreuenden Wissenschaftlern vorgestellt und die Gruppen eingeteilt. Nachdem sich die Gruppen gefunden und mit einem kleinen Spiel kennengelernt haben wird die Aufgabe noch einmal eingehend besprochen und erste Schwierigkeiten geklärt. Danach beginnt die bis Freitag andauernde Arbeitsphase.

Neben der reinen Arbeitszeit ist auch für ein entsprechendes Rahmenprogramm gesorgt, bei dem die Teilnehmer sich Gruppen übergreifend kennenlernen können. Dieses besteht aus umfassenden sportlichen Aktivitäten, Gruppenspielen, aber auch Rückzugsmöglichkeiten und am Mittwoch der CAMMP week mit einem großen Sportturnier mit anschließendem Grillen. Dies alles schafft eine gelöste Atmosphäre und hat einen sehr motivierenden Einfluss auf alle Teilnehmer.

Nach fünf Tagen und Nächten die zur Bearbeitung zur Verfügung standen, fahren die Teilnehmer freitags nach dem Frühstück geschlossen nach Aachen zurück, um ihre Ergebnisse den Aufgabenstellern, Veranstaltern, Vertretern der RWTH Aachen, weiteren Lehrkräften und Familienangehörigen im SuperC zu präsentieren. Danach hat jede Gruppe noch die Möglichkeit sich mit den Aufgabenstellern zu treffen und von diesen eine Einschätzung zu den erzielten Ergebnissen zu erhalten. Bei besonders guten Ergebnissen und aussichtsreichen Problemstellungen besteht auch die Möglichkeit das Projekt weiterzuführen und damit bei *Jugend forscht* anzutreten.

3 Modellierung des Strahlenfallenreceivers

3.1 Problemstellung

In Zeiten von Energiewende und Debatten über sichere Energiequellen im Hinblick auf Naturkatastrophen und Terroranschläge sowie der damit verbundenen Diskussion um die Schließung des belgischen Atomkraftwerks Tihange kann eine Aufgabe, bei der die erneuerbare Energie im Mittelpunkt stehen, kaum aktueller sein. Dank dieser Aktualität und der Omnipräsenz der Thematik in den Medien ist es nicht sonderlich schwer einen Bezug zum Leben der Schüler herzustellen und damit deren Interesse zu wecken. Im Fo-



Abb. 3: Solarthermiekraftwerk Planta Solar 20 in Spanien [Quelle: cityodat.blogspot.com]

kus der Öffentlichkeit finden sich bei den alternativen Methoden zur Energiegewinnung vor allem Windkraft, Solarpanels und eventuell noch Biogas. Solarturmkraftwerke, wie das Planta Solar 20 in Spanien (siehe Abb. 3), die in dieser Aufgabe Thema sind, hingegen finden nur äußerst selten Beachtung in den öffentlichen Debatten. Bei derartigen Kraftwerken wird das Sonnenlicht von einer großen Fläche mittels verstellbarer Spiegel aufgefangen, gebündelt und auf ein spezielles Teilstück des sich in der Mitte der Spiegelfläche befindlichen Turmes gelenkt (siehe Abb. 4). Dieser Teil des Turms ist der sogenannte *central receiver* oder *Strahlenfallenreceiver*, dessen Oberfläche in dieser Aufgabe optimal designt werden soll. Das ist nötig, da im Gegensatz zu konventionellen Solarpanels, die man häufig auch in privaten Haushalten finden kann, die physikalischen Effekte, aufgrund der hohen auftreffenden Strahlenenergie, einen maßgeblichen Einfluss auf den

Wirkungsgrad des Kraftwerks haben. Diese Effekte werden im Folgenden noch genauer erläutert. Gestellt wurde diese Aufgabe vom Lehrstuhl für Wärme und Stoffübertragung der RWTH Aachen, der sich ebenfalls unter anderem mit dieser und weiteren Fragen zur Optimierung von (Solarthermie-) Kraftwerken beschäftigt.

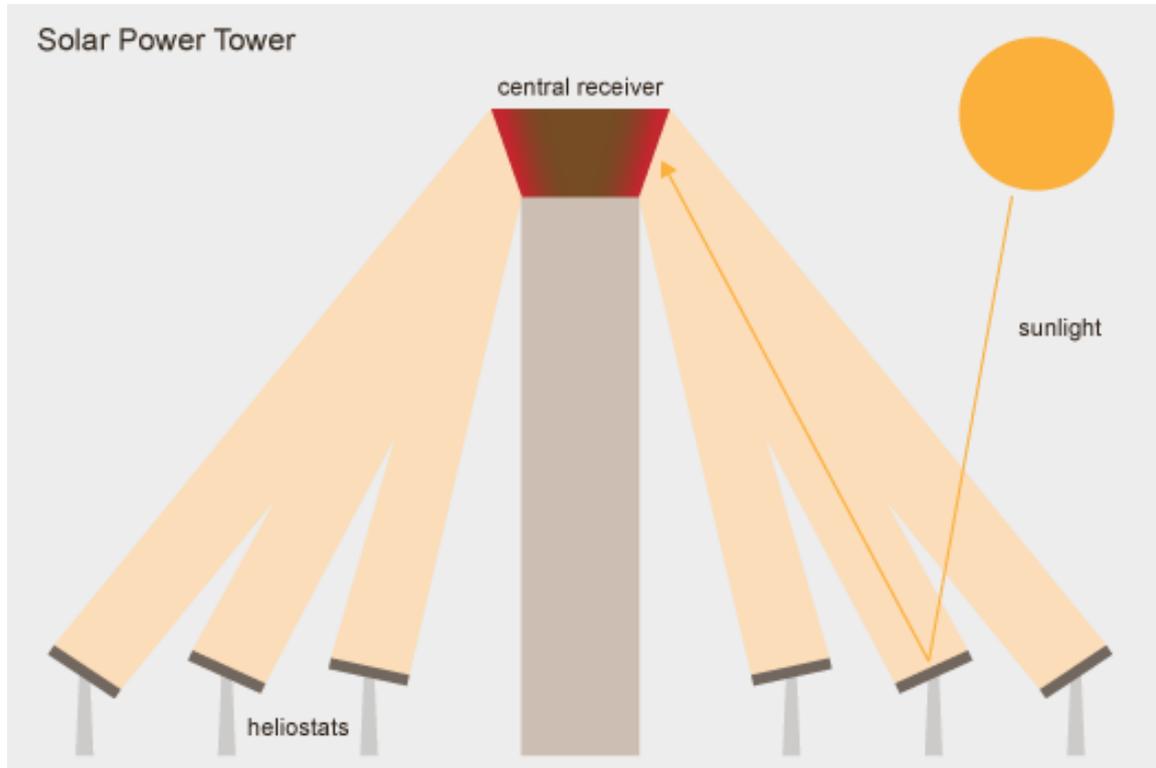


Abb. 4: Vereinfachte Darstellung eines Solarthermiekraftwerks [Quelle: visions.net]

Die Aufgabe an die SchülerInnen thematisiert den bereits erwähnten Strahlenfallenreceiver, also die Fläche, auf welche das gebündelte Licht auftrifft und das Wasser für die spätere Energiegewinnung erhitzt werden soll. Diese Fläche besteht nach Angaben des Aufgabenstellers aus gleichmäßigen Pyramiden mit 6-seitiger Grundfläche, die von innen mit Wasser durchströmt werden (siehe Abb. 5). Das Wasser auf der Innenseite dient einerseits zur Kühlung der Pyramiden, andererseits für die bereits erwähnte Energiegewinnung. Die im Innern auftretenden Effekte sind für uns jedoch nicht weiter von Interesse, da sich das Problem mit den im nächsten Kapitel näher erläuterten physikalischen Effekten an der Außenseite beschäftigt. Es ist also eine Lösung für das vor allem geometrisch interessante Optimierungsproblem, genauer der Öffnungswinkel zwischen zwei Pyramiden, gesucht.⁵

⁵Die genaue Problemstellung lässt sich unter Anhang A.2 finden.

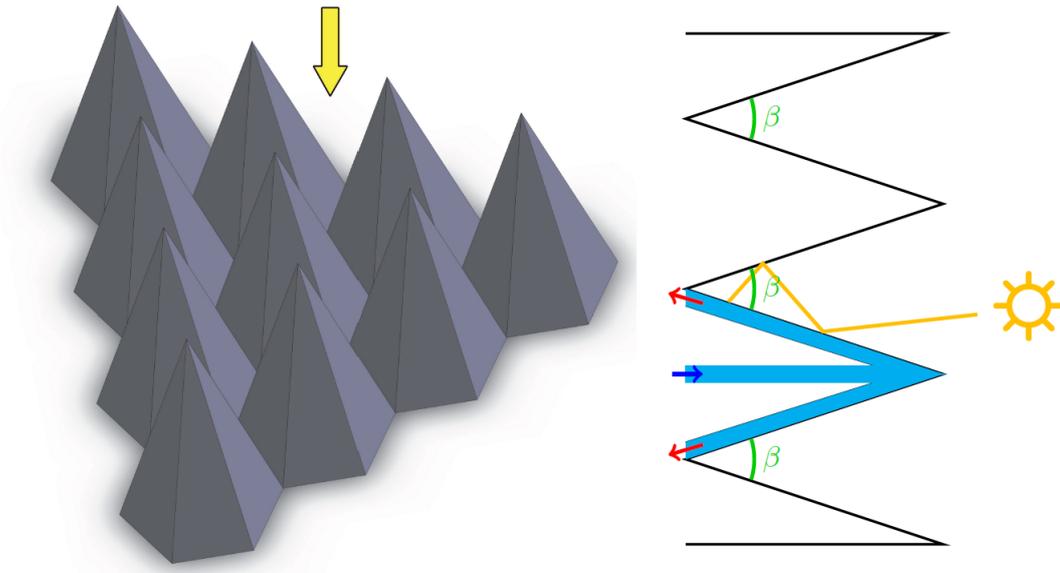


Abb. 5: Grundauffriss der Problemstellung. [Quelle: Oliver Garbrecht]

3.2 Grundlagen

Um das Problem lösen zu können, bedarf es eines überblicksartigen Verständnisses der physikalischen Grundlagen der auf der Oberfläche auftretenden Effekte **Konvektion**, **Emission** und **Reflexion**, die maßgeblich für einen Energieverlust und damit einen verminderten Wirkungsgrad verantwortlich sind. Diese Effekte sind größtenteils vom Oberflächenmaterial des Recievers (Pyromark) abhängig und daher schon vom Aufgabensteller mit den wichtigen Kennwerten vorgegeben. Die für die Berechnung benötigten Formeln sind hier ebenfalls angegeben. Zusätzlich werden alle Effekte als stationär, also als zeitlich stabil, betrachtet.

Aufgrund der großen Datenmengen, der Komplexität der Berechnung und dem damit verbundenen Aufwand, soll das Problem am Computer mit einem selbst erstellten Programm gelöst werden.

3.2.1 Reflexion

Die Reflexion bezeichnet den vermutlich am einfachsten zu verstehenden Effekt, nämlich dass ein Teil des einfallenden Lichts nicht von der Oberfläche absorbiert, sondern wieder zurückgeworfen (reflektiert) wird. Aufgrund des Oberflächenmaterials kann von einer gleichmäßig, diffusen Reflexion bzw. Streuung des Lichts ausgegangen werden. Also einer Reflexion, die ähnlich wie bei Papier, mit gleichmäßiger Intensität in alle Richtungen erfolgt. Dabei werden 95 % des Lichts vom Receiver absorbiert und können für die Energiegewinnung genutzt werden. Die restlichen 5 % werden reflektiert und müssen

dahingehend weiter untersucht werden, ob und wie viel dieses Lichts wieder auf einer anderen Pyramide auftritt oder ob es als Verlust anzusehen ist. Im Weiteren werden diese Verluste unter dem Begriff *Streuungsverluste* behandelt. Dabei kann mit einem Megawatt Sonnenenergie pro Quadratmeter, also mit einer einfallenden Intensität von $I_{Start} = 1 \frac{MW}{m^2}$ gerechnet werden.

3.2.2 Konvektion

Der Effekt der Konvektion beschreibt die Wärmeübertragung zwischen der aufgeheizten Oberfläche des Receivers und der angrenzenden kühleren Luft (vgl. [5], Metzler, 2006, S. 156f.). Aufgrund dieser Temperaturdifferenz entsteht ein konstanter Wärmefluss vom Receivermaterial zur Luft, der in diesem Fall einen Energieverlust darstellt, da die an die Luft abgegebene Wärme nicht mehr zur Erwärmung des Wassers, das durch die Pyramide fließt, genutzt werden kann. Da die Luft durch die Erwärmung in Bewegung gerät und die Pyramiden von innen mit Wasser durchströmt werden, kann davon ausgegangen werden, dass sich keinem Ausgleichszustand, in dem sich die Temperatur von Luft und Oberfläche aufgrund des Wärmeaustausches angleichen, angenähert wird. Stattdessen ist ein konstanter Wärmefluss zu beobachten. Auf diesen stationären Zustand soll sich bei der Betrachtung beschränkt werden, da dieser die größte Zeitspanne der Arbeitszeit des Kraftwerks ausmacht. Dabei kann von einem linearen Temperaturprofil der Oberfläche der Pyramide von 350 bis 600 Grad Celsius und bei der Luft von einem ebenfalls linearen Verlauf von 20 bis 25 Grad Celsius ausgegangen werden (siehe Abb. 16 in Kapitel 3.3.6). Die Energieverluste, also der Wärmefluss vom Oberflächenmaterial zur angrenzenden Luft, sind hauptsächlich von der Temperaturdifferenz zwischen diesen beiden Grenzflächen und der absoluten Fläche, auf der dieser Effekt auftritt, abhängig. Als Formel für den Wärmefluss \dot{Q} mit vom Auftragsteller gegebenem Wärmeübergangskoeffizienten α gilt:

$$\dot{Q} = \alpha \cdot A \cdot \Delta T$$

$$\alpha = 100 \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

3.2.3 Emission

Unter Emission ist der Energieverlust, der im Wesentlichen durch die Abgabe von Infrarotstrahlung auftritt, zu verstehen. Diese Strahlung entsteht bei jedem Körper, dessen Temperatur über dem absoluten Nullpunkt von 0 Grad Kelvin liegt, aufgrund der thermischen Energie, die der Körper innehat (vgl. [5], Metzler, 2006, S. 168f.). Dieser Effekt sollte durch die Wärmestrahlung, die von einer Raumheizung ausgeht, bereits bekannt sein. Zur Berechnung der Strahlungsverluste ist das Stefan Boltzmann'sche Gesetz anzuwenden, nach dem die Intensität I der ausgehenden Strahlung proportional zur vierten Potenz der Temperatur des Körpers wächst. Dabei ist σ die Stefan-Boltzmann-Konstante und der Emissionsgrad ϵ , wie auch der Reflexionsgrad, vom Material abhängig und be-

trägt 95%. Die Verluste werden in diesem Fall von I beschrieben:

$$I = \epsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot T^4$$

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$$

$$\epsilon = 0,95$$

3.2.4 Struktur des Programms

In der vorgestellten Lösung wird das Problem modular bearbeitet. Das bedeutet, dass eine Hauptprozedur (*mainfunction*) bzw. ein Hauptsript erstellt wird, in dem die wichtigen Kennzahlen und Informationen eingetragen werden. Aus dieser werden die zur Berechnung dienenden Prozeduren bzw. *functions* aufgerufen (siehe Abb. 6). Dies hat den Vorteil, dass das Programm übersichtlicher wird und die Unterpunkte des Problems iterativ oder rekursiv gelöst werden können. Außerdem können die zu Beginn angenom-

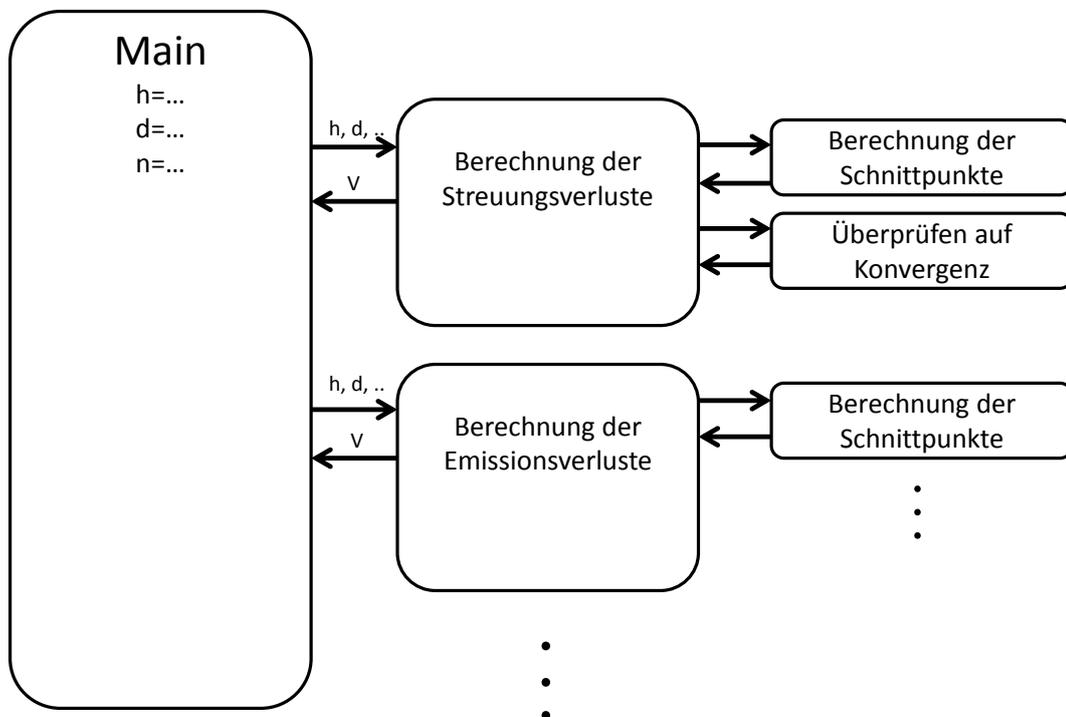


Abb. 6: Vereinfachte modulare Darstellung der Programmstruktur

menen Werte einfacher variiert und angepasst werden, da sie nur an einer Stelle neu eingetragen werden müssen. Anfangs sollten die einzelnen Prozeduren so erstellt werden, dass sie *einen speziellen* Winkel auf die Energieverluste untersuchen, da dies den

Rechen- und damit verbundenen Zeitaufwand verringert. In einem letzten Auswertungsschritt werden diese Prozeduren dann auf alle möglichen Winkel angewendet, mit dem Ziel den Winkel, bei dem die geringsten Energieverluste auftreten, zu finden. Somit wird diese Optimierungsprozedur dazu verwendet ein Minimum zu finden. Es wäre jedoch genauso gut möglich eine Maximierung der gewonnenen Energie anzustreben.

3.3 Lösungsvorschlag

Alle im Folgenden ausführlich aufgearbeitete Lösungen sind reine Vorschläge, die in dieser Form auf der CAMMP week von SchülerInnen erarbeitet wurden und sind daher bei der Umsetzung nicht bindend. Alternative Möglichkeiten sind als solche gekennzeichnet, jedoch nicht so umfänglich dargestellt. Es ist durchaus erwünscht, dass die SchülerInnen bei der Lösung der Problemstellung eigene Wege und Lösungen entwickeln, solange diese zielführend sind. Der Modellierungsprozess orientiert sich dabei vorrangig an dem Modellierungskreislauf nach Ortlieb, der in Kapitel 2.1.4 vorgestellt wurde, da dieser dem Arbeitsverhalten der SchülerInnen zugrunde liegt. Es obliegt der Lehrkraft den Kreislauf nach Blum zur Diagnose und Unterstützung anzuwenden.

3.3.1 Reduzierung des Problems

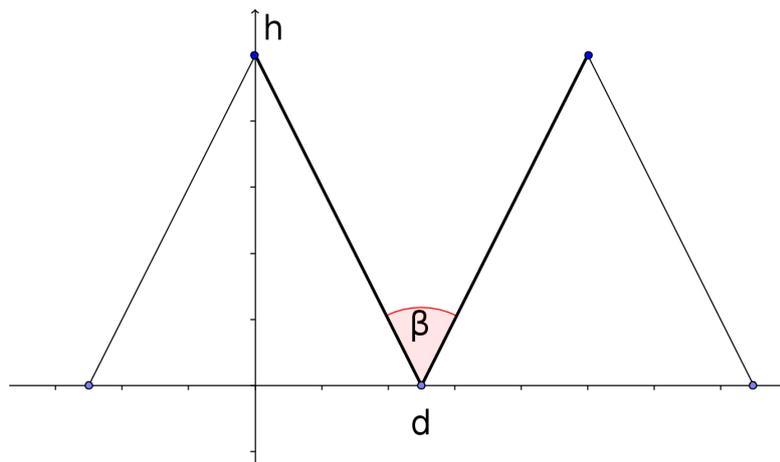


Abb. 7: Erste Modellannahme: Öffnungskelch zwischen zwei Pyramiden, zweidimensional

Die erste Modellannahme, die im Schritt der Modellierung/Mathematisierung getroffen wird, ist, dass das komplexe dreidimensionale Problem auf ein einfacheres, zweidimensionales reduziert wird (siehe Abb. 7). Dabei wird die Öffnung zwischen zwei Pyramidenseiten als Öffnungs- oder Pyramidenkelch bezeichnet. Diese erste Annahme ist aufgrund der Grafik der Aufgabenstellung naheliegend. Außerdem können, dank der Symmetrie der Oberfläche des Recievers, Flächenelemente, als Streckenelemente betrachtet werden. Die Begründung für diese Annahme lässt sich leicht herausfinden, wenn man auf dem dreidimensionalen Modell mit orthogonalem Strahlengang das Verhalten der Strahlen

untersucht. Dabei wird man feststellen, dass die Strahlen, die nicht in dem untersuchten Kelch auftreffen, in einem benachbarten Kelch auftreffen.

Des Weiteren kann die Betrachtung auf ein Teilstück zwischen zwei Pyramiden beschränkt werden. Diese Reduzierung ist recht unproblematisch, da aufgrund der Symmetrie die Effekte in allem Pyramidenkelchen gleich sind und somit zu einem späteren Zeitpunkt einfach auf die zu betrachtende Receiverfläche hochgerechnet werden können. Die Randflächen müssen nicht gesondert betrachtet werden, da diese im Vergleich zur restlichen Receiverfläche nur einen geringen Flächenanteil ausmachen, außerdem ist dort die Strahlenintensität nicht so hoch ist wie im Zentrum der Receiverfläche.

Ebenso reicht die Annahme, die schon zu Beginn angesprochen wurde, dass das Licht unter einem speziellen Winkel zur Grundfläche, in diesem Fall orthogonal, einfällt. Dies lässt sich leicht erklären, wenn man den Strahlengang unter einem anderen Einfallswinkel betrachtet. Dabei wird auffallen, dass die auftretenden Effekte ähnliche Auswirkungen haben oder der Winkel keine besondere Rolle spielt. Zusätzlich kann davon ausgegangen werden, dass sowohl Spiegel, als auch die Receiverfläche so eingestellt sind, dass man von einem orthogonalen Strahlengang ausgehen kann. Zur Überprüfung dieser Annahme, sollte das Programm so aufgebaut werden, dass sich der Winkel in der *main* ändern lässt und damit auch für alle anderen *functions* übernommen wird.

In der vorgestellten Lösung wird vor allem eine Minimierung der Verluste angestrebt.

Alternativen:

- Das Modell kann auch weiterhin dreidimensional betrachtet werden. Dafür können die im Folgenden vorgestellten Vorschläge zum dreidimensionalen erweitert werden. Dies erfordert jedoch einen erheblichen Mehraufwand an Rechenleistung und -zeit.
- Die Berechnung kann statt auf einen Zacken, auf ein festgelegtes Strecken- bzw. Flächenelement erweitert werden. Beispielsweise auf $1m^2$ (siehe dazu Abb.8). Bei diesem Ansatz muss zusätzlich klar definiert werden, was mit einem Strahl passiert, der auf der Spitze einer Pyramide auftrifft. Dies entfällt bei dem oberen Ansatz, da solche Strahlen gar nicht erst betrachtet werden. Diese Herangehensweise erfordert jedoch ebenfalls mehr Rechenleistung, da deutlich mehr Berechnungen durchgeführt werden müssen. Außerdem bietet es keinen nennenswerten Vorteil, da die Verluste eines Teilstücks zwischen zwei Pyramiden problemlos auf eine beliebige Fläche hochgerechnet werden können.

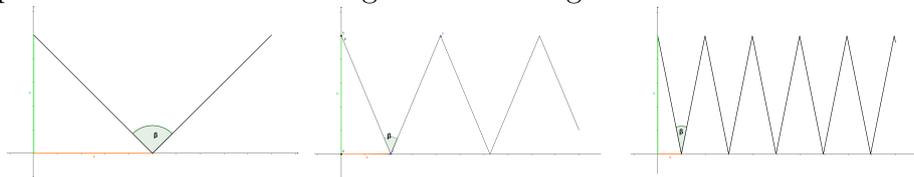


Abb. 8: Berechnung auf einem festem Flächenelement

3.3.2 Geometrie der Strahlen und der Oberfläche

Für die Reflexion wird die durch die Sonneneinstrahlung auftreffende Energie in Form von Vektoren dargestellt und berechnet. Dafür müssen ebenfalls die Seiten der Dreiecke als Vektoren dargestellt werden. So kann ein Schnittpunkt der Vektoren (Sonnenstrahl trifft auf Oberfläche) ermittelt werden, von dem aus wieder neue Strahlen reflektiert werden. Diese Strahlen werden nun untersucht, ob sie auf der gegenüberliegenden Seite auftreffen und werden dementsprechend weiter verfolgt, oder ob diese nicht auftreffen, also als Energieverlust zu werten sind. Dies ist schematisch für einen Strahl in Abb 9 dargestellt.

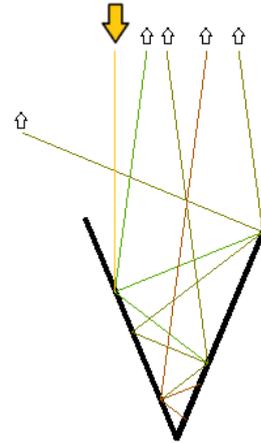


Abb. 9: Streuung eines eingehenden Strahles, *MATLAB* Ausgabe

Alternative:

Eine alternative Möglichkeit ist, dass die Strahlen weiterhin als Vektoren dargestellt werden, die Zacken jedoch diskretisiert, also in eine endliche Anzahl von Teilstücken unterteilt werden und die auf diesen Teilstücken aufgefangene Energie, mit der eingehenden Energie verglichen wird. Da diese Möglichkeit vom Aufgabensteller selbst angegeben wurde, später auf einige Methoden dieser Lösung zurückgriffen werden kann und diese Berechnung bei reellen Problemlösungen häufige Anwendung findet, wird dieser Ansatz in Kapitel 3.3.4 ausführlicher bearbeitet.

3.3.3 Energieverluste durch Reflexion

Für die Bearbeitung des ersten Effekts, der Reflexion bzw. Streuung eines Teils der auftreffenden Strahlung, muss zuerst die Oberfläche für einen Kelch mit Vektoren dargestellt werden. Die wichtigen Eingabewerte sind die Höhe h eines Dreiecks, der Öffnungswinkel β zwischen zwei Dreiecken und die Breite d einer halben Pyramide, die sich aus h und β berechnen lässt. Die Höhe ist vorerst beliebig wählbar kann aber nach Angaben des Auftragstellers auf $0,5m$ festgesetzt werden.⁶ Diese Daten sind in Abb. 10 mit Bezeichnung dargestellt. Als Stützvektor der ersten (linken) Seite \vec{z}_1 wählen wir

$$\vec{s}_{z1} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$$

⁶Die optimale Höhe eines Zackens zu finden, ist eine optionale Erweiterung der Problemstellung.

und als Richtungsvektor

$$\vec{v}_{z1} = \begin{pmatrix} d \\ -h \end{pmatrix},$$

wobei

$$d = h \cdot \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

gilt. Diese Werte werden eingesetzt in die Geradengleichung $\vec{x} = \vec{s} + r \cdot \vec{v}$, wobei r auf dem Intervall von 0 bis 1 ist, da wir nur ein endliches Teilstück des Vektors betrachten. Das ergibt in diesem Fall

$$\vec{z}_1 = \vec{s}_{z1} + r \cdot \vec{v}_{z1} \text{ mit } r \in [0, 1].$$

Und in ausgeschriebener Form

$$\begin{pmatrix} z_{1x} \\ z_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} d \\ -h \end{pmatrix} \text{ mit } r \in [0, 1].$$

Analog wird für die rechte Seite \vec{z}_2 vorgegangen. Als Stützvektor für den ersten Strahl wählen wir

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} x_s \\ h \end{pmatrix}$$

mit

$$x_s = \frac{1}{\text{Anzahl der Strahlen pro m}}.$$

Für jeden weiteren Strahl gilt somit

$$\vec{s}_i = \begin{pmatrix} i \cdot x_s \\ h \end{pmatrix}.$$

Der Richtungsvektor soll orthogonal zur Grundfläche sein, daher wählen wir für alle Strahlen

$$\vec{v}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Eine grafische Ausgabe ist dafür zwar nicht nötig, doch kann diese sehr nützlich für das Verständnis und eine eventuelle Fehlerbeseitigung sein (siehe Abb. 9). Hierbei ist besonders auf die Darstellung von Vektoren bei *MATLAB* zu achten und für die Zeichnung auf die Besonderheiten des *line*-Befehls, da Koordinaten der Vektoren nach Zugehörigkeit der Achsen und nicht der Vektoren eingegeben werden.

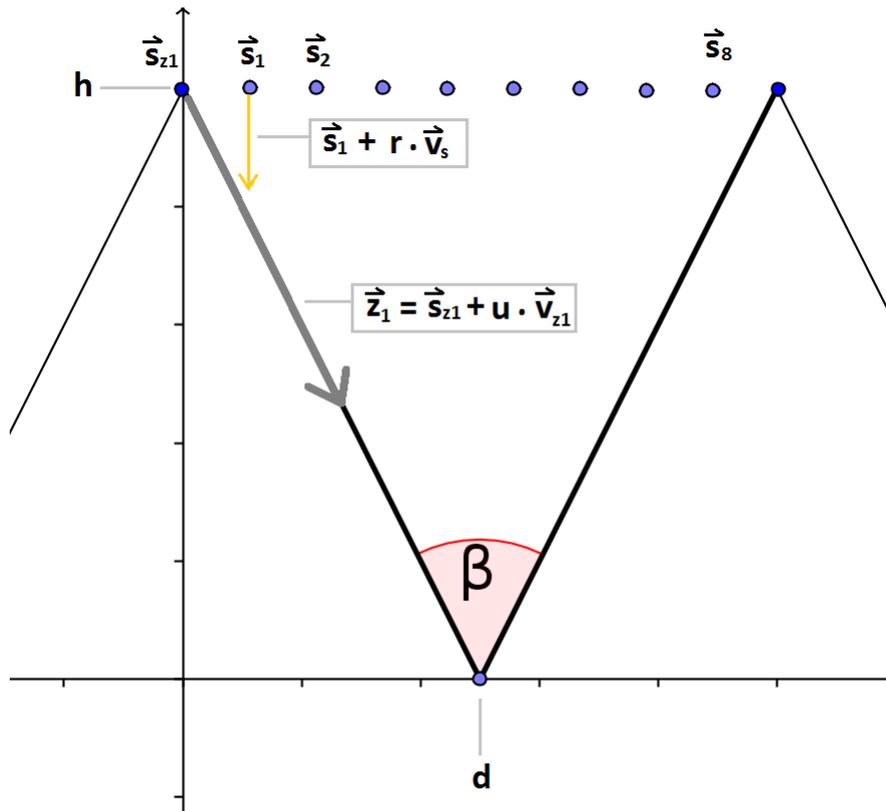


Abb. 10: Öffnungskelch mit vektoriellen Koordinaten

Der nächste Schritt ist die Ermittlung des Schnittpunktes des eingehenden Strahls mit einer der beiden Seiten⁷. Ist die X-Koordinate des Strahls größer oder gleich d wird der Schnittpunkt auf z_1 berechnet, andernfalls auf z_2 . Zur Berechnung des Schnittpunktes werden einfach die Geradengleichungen gleichgesetzt (siehe P_1 in Abb. 12).

Von diesem Schnittpunkt aus werden nun m neue Strahlen gleichmäßig ausgesandt, die jeweils einen Winkel von $\gamma = \frac{180}{m}$ untereinander aufweisen. Der erste Strahl wird in einem Winkel von $\frac{\gamma}{2}$ zu z_1 (bzw. z_2) erstellt (siehe Abb. 11). Nachdem diese neuen Strahlen erstellt wurden, werden sie auf ihr Verhalten bzw. den weiteren Verlauf getestet. Dabei sind drei Strahlengänge möglich (siehe Abb. 12). Es soll zuerst überprüft werden, ob der Strahl parallel zur Seite des gegenüberliegenden Zackens verläuft (siehe grüner Strahl in Abb. 12), also die Richtungs-

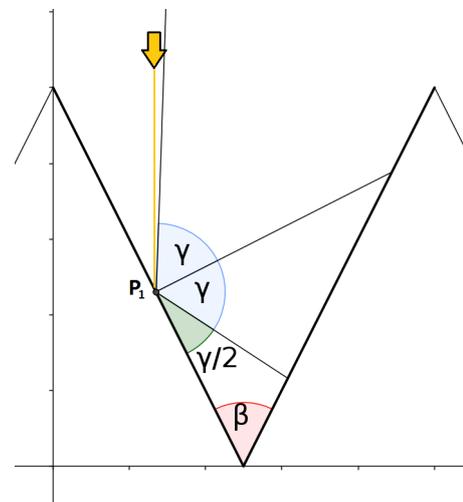


Abb. 11: Neue ausgehende Strahlen von Schnittpunkt P_1

⁷Dies kann, wie in Anhang B.5 und B.6, mit zwei *functions* oder mit nur einer gelöst werden.

vektoren des Strahls und des Zackens gleich sind. Trifft dies zu, wird der Strahl als Verlust behandelt und auf die summierten Verluste aufaddiert.

Ist dies nicht der Fall, wird ein Schnittpunkt errechnet, von dem noch überprüft werden muss, ob dieser innerhalb des Kelches liegt, also auf dem zu betrachtenden Teilstück des Seitenvektors (siehe Abb. 12). Das würde bedeuten, dass der Schnittpunkt durch die Geradengleichung von z_2 mit $0 \leq u \leq 1$ ausgedrückt werden kann (siehe P_2 in Abb. 12). Trifft dies nicht zu, gilt also $1 < r$, wird die Intensität des Strahls auf die Verluste aufaddiert (siehe P_3 in Abb. 12). Ist der Schnittpunkt innerhalb des Kelches, werden von dort aus, wie gerade, wieder neue Strahlen mit entsprechend geringerer Intensität erstellt und die selbe Prozedur wird durchlaufen. Für die Intensität gilt

$$I_s = \frac{I_{Start}}{\text{Anzahl der Strahlen}}$$

und für die neu erstellten Strahlen

$$I_{s_{neu}} = \frac{0.05 \cdot I_s}{\text{Anzahl der neu erstellten Strahlen}}$$

Diese Schritte werden ausgeführt, bis die Intensität der Strahlen unter einen Schwellenwert fällt, bei dem die Intensität so gering ist, dass eine weitere Betrachtung sich nicht mehr lohnt, die Verluste also gegen einen Grenzwert konvergieren. Dies wird in Kapitel 3.3.5 näher bearbeitet. Daraus ergibt sich, dass eine Prozedur erstellt werden muss, die den Verlust für die folgenden Eingabewerte ausgibt:

- Höhe h und Breite d eines Zackens
- Stützvektor s_i und Richtungsvektor v_s des Strahls
- die Intensität I_i des Strahls
- den Streuwinkel γ der ausgehenden Strahlen
- den Öffnungswinkel β zwischen zwei Zacken

Mittels einer For-Schleife wird diese Prozedur dann für einen Winkel β aufgerufen, unter dem alle Strahlen, die auf diesem Teilstück auftreten, durchlaufen und die Verluste aufaddiert werden. In einer weiteren For-Schleife wird diese Prozedur nun für alle zu untersuchenden Winkel durchgeführt und die Verluste in Abhängigkeit des Winkels gespeichert. Diese letzte Schleife, sollte jedoch erst später implementiert werden, da sie der Hauptuntersuchung für alle Teilprobleme dienen kann (siehe Kapitel 3.3.8).

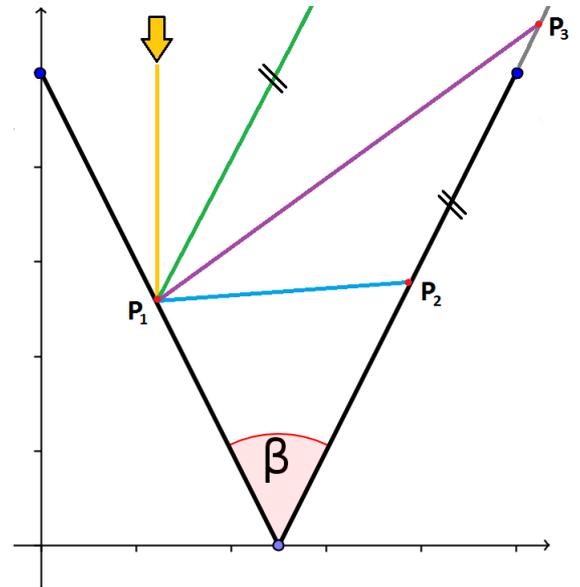


Abb. 12: Drei mögliche Strahlgänge

Algorithm 1 Iterative Berechnung der Streungsverluste

```
1: procedure VERLUSTSTREU( $h, d, s_i, v_s, I_i, \gamma, \beta$ )
2:   while Strahlen vorhanden, die einen Schnittpunkt besitzen and konv= false do
3:     if Verluste konvergieren then
4:       konv  $\leftarrow$  true
5:     if Schnittpunkt nicht auf  $z_1$  oder  $z_2$  then
6:       Summe  $\leftarrow$  Summe +  $I_i$ 
7:     else
8:       if konv = false then
9:         berechneNeueStrahlen
```

Alternative:

- Anstelle eines Abbruchkriteriums mittels Konvergenz, wäre es auch möglich nach einer festen Anzahl von Schritten die Berechnung zu beenden. Um den Rechen- und Zeitaufwand im Rahmen zu halten, sollten nicht mehr als 5 Iterationsschritte durchgeführt werden. Dies ist gerade am Anfang des Programmierungsprozesses sinnvoll, da dadurch ein definitiver Abbruch definiert ist, was den SchülerInnen Zeit bei der Fehlersuche erspart. Dies kann beibehalten werden, ist unter mathematischen Gesichtspunkten aber nicht empfehlenswert, siehe dazu Kapitel 3.3.5.
- Neben der iterativen, ist ebenfalls eine rekursive Berechnung denkbar. Diese könnte wie folgt aussehen:

Algorithm 2 Rekursive Berechnung der Streungsverluste

```
1: procedure VERLUSTSTREU( $h, d, s_i, v_s, I_i, \gamma, \beta$ )
2:   if Verluste konvergieren then
3:     return 0
4:   if Schnittpunkt auf  $Z_1$  oder  $Z_2$  then
5:     berechneNeueStrahlen
6:     Summe  $\leftarrow$  0
7:     for jeden Strahl  $V_{neuS}$  und seine Intensität  $I_{neuS}$  in  $R$  do
8:       Summe  $\leftarrow$  Summe + verlustStreu( $h, d, V_{neuS}, I_{neuS}, \gamma, \beta$ )
9:     return Summe
10:  if andernfalls then return  $I_s$ 
```

3.3.4 Diskrete Berechnung der Energieverluste durch Streuung

Anstelle der rein vektoriellen Berechnung gibt es auch die Möglichkeit, das Problem mittels Diskretisierung der Pyramidenseiten zu lösen. Diese Variante wird in der Realität ebenfalls häufig angewendet und daher etwas ausführlicher beschrieben⁸. Bei dieser Methode wird jede Pyramidenseite in n Streckenelemente unterteilt. Je größer n ist, desto genauer wird die Berechnung, jedoch erfordert es auch mehr Rechenleistung, daher wird zu Anfang $n = 10$ empfohlen. Als nächstes wird untersucht, wie viel einfallende Sonnenstrahlen pro Flächenstück auftreffen und deren Intensität aufaddiert. Dazu kann die Berechnung des Schnittpunktes aus 3.3.3 benutzt werden. Es wird also für jeden Strahl untersucht, auf welchem Flächenstück dieser einen Schnittpunkt hat. Daraufhin wird die Intensität des Strahls auf die spezifische Intensität des Flächenelements aufaddiert.

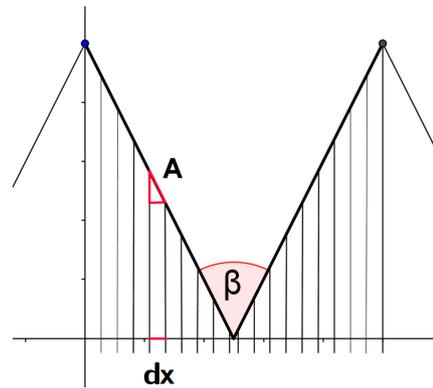


Abb. 13: Diskretisierter Öffnungskelch

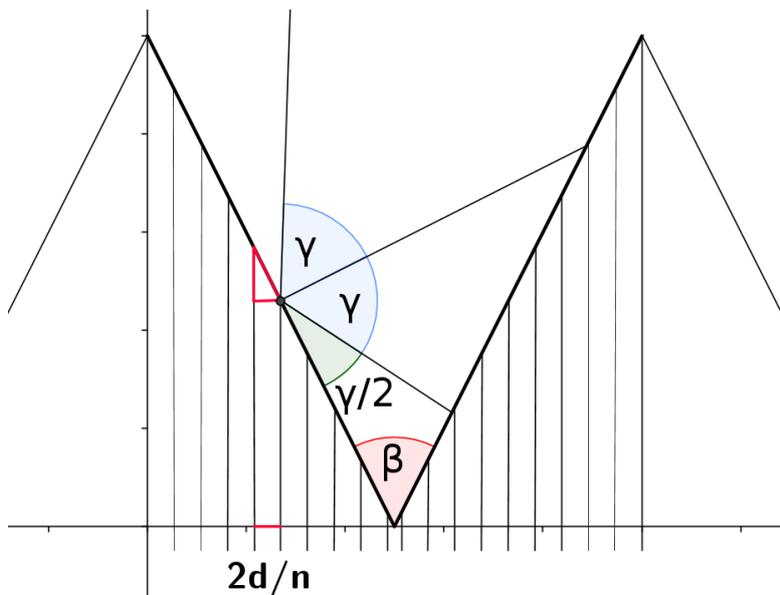


Abb. 14: Ausgehende Strahlen eines exemplarischen Flächenelements

Von dieser auftreffenden Intensität werden nun 5% auf die neuen ausgehenden Strahlen aufgeteilt, die ihren Startpunkt am *weitesten rechts gelegenen Punkt des Flächenelements* haben⁹ (Punkt des Flächenelements mit der größten X-Koordinate, siehe Abb. 14). Die

⁸Allerdings wird diese Methode nur beschrieben und es gibt keinen direkten Lösungsvorschlag in MATLAB dazu, jedoch kann man sehr ähnlich zu 3.3.6 bzw. Anhang B.8 vorgehen.

⁹Dieser Punkt dient nur zur Demonstration. Der Startpunkt der Strahlen kann natürlich beliebig gewählt werden, sollte nur bei jedem Element ähnlich sein.

neuen Strahlen werden nun wieder auf einen Schnittpunkt mit den Flächenelementen untersucht. Ist dies der Fall, wird die Intensität auf das Flächenelement aufaddiert und von diesem nach dem selben Verfahren neue Strahlen ausgesandt. Andernfalls wird die Intensität der Strahlen zu den Verlusten aufaddiert. Für die Erstellung der neuen Strahlen kann die Methode aus 3.3.3 benutzt werden, wobei jedoch der Startpunkt abhängig vom Flächenelement gewählt wird. Es bietet sich hierbei wieder an die Konvergenz der Verluste als Abbruchkriterium zu verwenden.

Es wird also eine Methode erstellt mit folgenden Eingabewerten:

- der Öffnungswinkel β zwischen zwei Zacken
- Höhe h eines Zackens
- die Anzahl $n_{StreuDiskret}$ der Flächenelemente
- die Intensität I_S eines Strahls
- den Streuwinkel γ der ausgehenden Strahlen

Algorithm 2 Diskrete Berechnung der Streuverluste

```

1: procedure EMISSION( $\beta, h, n_{StreuDiskret}, \gamma$ )
2:   berechneStützvektoren(  $\beta, h, n_{emission}$  )
3:   Flächenelement Diskretisierung  $\leftarrow$  Fläche  $\div$  Anzahl Flächenelemente
4:   for 1 to Anzahl Flächenelemente do
5:     berechne  $I_{Strahl}$  für jeden Strahl ausgehend von Flächenelement
6:     berechneNeueStrahlen
7:      $I \leftarrow I + \text{verlustStreu}(h, d, V_S, I_{Strahl}, \gamma_{emission}, \beta)$ 

```

Alternative:

Auf einen vektoriellen Strahlenverlauf könnte auch insgesamt verzichtet werden. In diesem Fall würde zu Beginn die einfallende Intensität der Sonnenstrahlen auf die Flächenelemente aufgeteilt werden. Aufgrund der Symmetrie würde jedem Flächenelement also $I_{Element} = \frac{I_{Sonne}}{n}$ zugeschrieben werden. Von dieser Intensität werden nun wieder 5% reflektiert. Nun wird jedoch von einem beliebig Startpunkt auf dem Element der Winkel γ zur Spitze des gegenüberliegenden Zackens berechnet und zusätzlich dazu, die Öffnungswinkel Φ_i (siehe Abb.15) für jedes gegenüberliegende Flächenelement. Als nächstes wird die reflektierte Intensität, die nicht auf der Seite auftrifft, auf die Verluste aufaddiert und für jedes Flächenelement die Energie, die von den gegenüberliegenden Elementen auf diese reflektiert wird, hinzugefügt. Danach wird das Verfahren erneut durchgeführt, bis zu einer festgelegten Anzahl von Durchläufen oder bis die Verluste konvergieren.

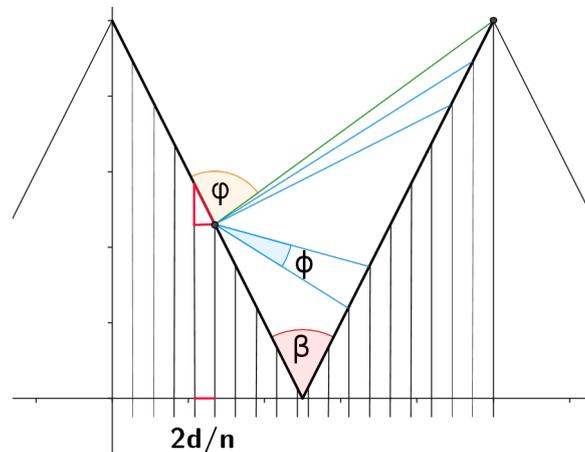


Abb. 15: Winkelabhängige diskrete Berechnung

3.3.5 Konvergenz der Verluste

An dieser Stelle sei die Möglichkeit gegeben, einen Exkurs zum Thema Konvergenz vorzunehmen:

Der Begriff der Konvergenz taucht im mathematisch-universitären Kontext vor allem im Zusammenhang mit Reihen, Folgen und Funktionen auf, wenn es um deren Verhalten gegen einen bestimmten Grenzwert (zum Beispiel das Unendlichkeitsverhalten einer Funktion oder Verhalten an einer Definitionslücke) geht. Mathematisch ist die Konvergenz wie folgt definiert:

Definition: Eine reelle Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ heißt *konvergent*, wenn ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit der Eigenschaft

$$|a_n - a| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0$$

Man nennt a den *Limes* oder *Grenzwert* der Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ und schreibt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Man sagt auch, dass $(a_n)_{n \geq 1}$ *gegen a konvergiert*.

Die Verluste nach 1, 2, ..., n Schritten können wir als Reihe auffassen, deren Grenzwert wir zwar nicht exakt bestimmen können, sondern nur eine Näherung nach n Schritten erhalten. Dieser exakte Grenzwert ist jedoch gar nicht von übergeordnetem Interesse, da er sich nach einer gewissen Anzahl von Schritten nicht mehr maßgeblich verändert und nur noch einen geringen Einfluss auf das Endergebnis hat. Viel interessanter für die Erstellung eines Abbruchkriteriums ist es, herauszufinden wann dies der Fall ist, da sich ab diesem Moment eine weitere Berechnung nicht mehr lohnt und somit die Rechenzeit erheblich verkürzt werden kann. Dabei ist nur die Tatsache, dass die Veränderungsrate gering ist, von Bedeutung, nicht aber die absolute Schrittzahl, da in diesem Moment die Berechnung gestoppt werden kann. Um zu überprüfen, ob die Verluste irgendwann gegen einen solchen Grenzwert konvergieren, bei dem sich eine weitere Betrachtung nicht mehr lohnt, wird eine Prozedur erstellt, die den Verlust des vorangegangenen Iterationsschrittes mit dem aktuellen Verlust vergleicht. Dazu wird eine obere und untere Schranke, in Abhängigkeit vom ersten Verlust, um diesen gelegt und überprüft, ob sich der aktuelle Verlust zwischen diesen Schranken befindet.¹⁰ Falls die Verluste konvergieren soll die Prozedur *true* ausgeben, andernfalls *false*.

Algorithm 3 Konvergenz der Verluste

```
1: procedure KONVERGIERT( $Verlust_{vorher}, Verlust_{aktuell}$ )
2:   Definiere  $SchrankeOben$  und  $SchrankeUnten$  in Abhängigkeit von  $Verlust_{vorher}$ 
3:   if  $Verlust_{aktuell} \geq SchrankeUnten$  and  $Verlust_{aktuell} \leq SchrankeOben$  then
4:     return true
5:   else
6:     return false
```

3.3.6 Energieverluste durch Emission

Für das folgende Problem wird die Temperatur des Oberflächenmaterials des Recievers benötigt. Dieses ist jedoch nicht an jeder Stelle gleich, sondern wir müssen einen linearen Temperaturverlauf von der Spitze bis zur tiefsten Stelle des Kelches annehmen (siehe Abb. 16). Dabei kann mit folgenden Werten gerechnet werden (in Grad Kelvin):

¹⁰Als Schwellwert kann ein beliebig kleiner Wert gewählt werden. In der Musterlösung wird mit 0.0001 gerechnet, also wenn die Änderung der Verluste nur noch 0,01% beträgt. Bei dieser Veränderungsrate kann angenommen werden, dass der Einfluss weiterer Rechenschritte auf das Endergebnis vernachlässigt werden kann.

$$\begin{aligned}
M_{Top} &= 623.15^\circ K && \text{Temperatur des Materials an der Spitze} \\
M_{Bottom} &= 873.15^\circ K && \text{Temperatur des Materials im Kelch} \\
T_{Top} &= 293.15^\circ K && \text{Temperatur der Luft an der Spitze} \\
T_{Bottom} &= 298.15^\circ K && \text{Temperatur Luft im Kelch}
\end{aligned}$$

Um die Emissionsverluste zu berechnen, muss die Oberfläche des Kelches diskretisiert werden (siehe Abb. 13). Das bedeutet, dass eine Anzahl von Flächenelementen festgelegt werden muss, anhand derer die Verluste durch Infrarotstrahlung bestimmt werden können. Da dies wieder ein Strahlungsproblem ist, kann vektoriell gerechnet werden und auf einige Vorgehensweisen und Prozeduren des vorherigen Problems zurückgegriffen werden.

Dafür müssen im ersten Schritt die Stützvektoren der Infrarotstrahlen für ein Flächenelement bestimmt werden. Dabei wählen wir den Punkt mit der größten X-Koordinate dieses Elements als Startpunkt der ausgehenden Strahlen. Von diesem Punkt können dann die Richtungsvektoren der Strahlen, ähnlich wie bei den Reflexionsverlusten, berechnet werden (siehe Abb. 14). Zusätzlich wird jedem Strahl noch eine Intensität zugeordnet, die anhand des Flächenelements und der Temperatur der Oberfläche des Zackens bestimmt wird. Dazu wird die Formel aus 3.2.3 benutzt. Nun kann die bereits vorhandene Funktion für die Streuverluste auf jeden dieser Strahlen angewendet werden. Die Summe dieser Verluste für alle Flächenelemente ergibt den Verlust durch Emission bei gegebenem Winkel β . Es werden also für die Berechnung der Verluste folgende Eingabewerte benötigt:

- der Öffnungswinkel β zwischen zwei Zacken
- Höhe h eines Zackens
- die Anzahl $n_{emission}$ der Flächenelemente
- den Streuwinkel $\gamma_{emission}$ der ausgehenden Strahlen

Anschließend kann mittels einer For-Schleife der Verlust für alle zu untersuchenden Winkel überprüft werden (siehe 3.3.8).

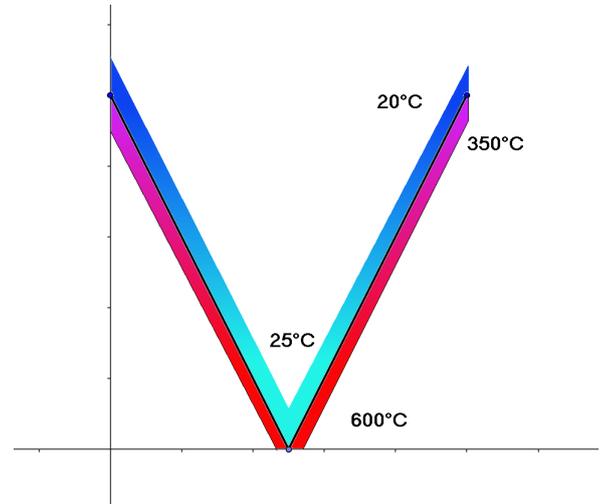


Abb. 16: Temperaturverlauf der Luft und des Festkörpers, in Grad Celsius

Algorithm 4 Emissionsverluste

```
1: procedure EMISSION( $\beta, h, n_{emission}, \gamma_{emission}$ )
2:   berechneStützvektoren( $\beta, h, n_{emission}$ )
3:   Flächenelement Diskretisierung  $\leftarrow$  Fläche  $\div$  Anzahl Flächenelemente
4:   for 1 to  $n_{emission}$  do
5:     berechne  $I_{Strahl}$  für jeden Strahl ausgehend von Flächenelement
6:     berechneNeueStrahlen
7:      $I \leftarrow I +$  verlustStreu( $h, d, V_S, I_{Strahl}, \gamma_{emission}, \beta$ )
```

3.3.7 Energieverluste durch Konvektion

Die Lösung der Konvektion gestaltet sich als deutlich komplexer, wenn man sie in aller Ausführlichkeit bearbeiten möchte¹¹, daher wird das Problem an dieser Stelle reduziert. Da die Zacken symmetrisch, sind berechnen wir die Verluste nur für eine Seite und verdoppeln diese dann. Für den Wärmeübergang zwischen Feststoff und Luft kann die Formel verwendet werden, die bereits in 3.2.2 erwähnt wurde. Hierbei ist zu beachten, dass der Wärmefluss an jeder Stelle anders ist, weshalb wir infinitesimal rechnen müssen und die Oberfläche abhängig vom Winkel ist:

$$A = \frac{dx}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

Dies eingesetzt in die Formel aus 3.2.2 liefert:

$$\dot{Q}(x, \beta) = 100 \cdot \frac{dx}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} \cdot (T_M(x) - T_L(x))$$

Mit den bekannten Temperaturangaben (in Grad Kelvin):

$$\begin{aligned} M_{Top} &= 623.15^\circ \text{ Temperatur des Materials an der Spitze} \\ M_{Bottom} &= 873.15^\circ \text{ Temperatur des Materials im Kelch} \\ T_{Top} &= 293.15^\circ \text{ Temperatur der Luft an der Spitze} \\ T_{Bottom} &= 296.15^\circ \text{ Temperatur Luft im Kelch} \end{aligned}$$

Da das Temperaturprofil linear verläuft, können für die Temperatur des Materials T_M und die Temperatur der Luft T_L folgende Formeln verwendet werden:

$$\begin{aligned} T_M(x) &= M_{Top} + \frac{x}{d} \cdot (M_{Bottom} - M_{Top}) \\ T_L(x) &= L_{Top} + \frac{x}{d} \cdot (L_{Bottom} - L_{Top}) \end{aligned}$$

¹¹Der Lösung dieses Problems hat sich das auftragsstellende Institut selbst gewidmet, da es erheblich mehr Rechenleistung und Simulationsarbeit benötigt, als in privaten Haushalten oder Schulen umsetzbar wäre.

Eingesetzt in die Gleichung folgt:

$$\dot{Q}(x, \beta) = 100 \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} \cdot \left(M_{Top} + \frac{x}{d} \cdot (M_{Bottom} - M_{Top}) - L_{Top} - \frac{x}{d} \cdot (L_{Bottom} - L_{Top}) \right) \cdot dx$$

Da die Summe aller infinitesimalen Teilstücke betrachtet wird, wird über x integriert:

$$\begin{aligned} \dot{Q}(\beta) &= \int_0^d 100 \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} \cdot \left(M_{Top} + \frac{x}{d} \cdot (M_{Bottom} - M_{Top}) - L_{Top} - \frac{x}{d} \cdot (L_{Bottom} - L_{Top}) \right) \cdot dx \\ &= 50 \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} \cdot d \cdot (M_{Bottom} + M_{Top} - L_{Bottom} - L_{Top}) \end{aligned}$$

Für die spätere Untersuchung folgt als letzter Schritt die Umrechnung der Verluste auf $1m^2$:

$$\frac{\dot{Q}(\beta)}{d} = 50 \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} \cdot (M_{Bottom} + M_{Top} - L_{Bottom} - L_{Top}) \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

Diese Verluste können nun einfach anhand dieser Formel mittels der For-Schleife aus 3.3.8 für alle Winkel berechnet werden.

3.3.8 Gesamtverluste und Auswertung

Um die abschließende Gesamtauswertung auszuführen, müssen die Ergebnisse der erstellten Prozeduren zu einem speziellen Winkel abgespeichert werden. Dazu wird für jedes Teilproblem ein Array erstellt, in das für jeden zu untersuchenden Winkel die Energieverluste geschrieben werden. Für die Gesamtverluste werden diese einzelnen Verluste anschließend einfach aufaddiert. Die Untersuchung erfolgt mittels einer bereits erwähnten For-Schleife¹²:

Algorithm 5 Berechnung aller Verluste

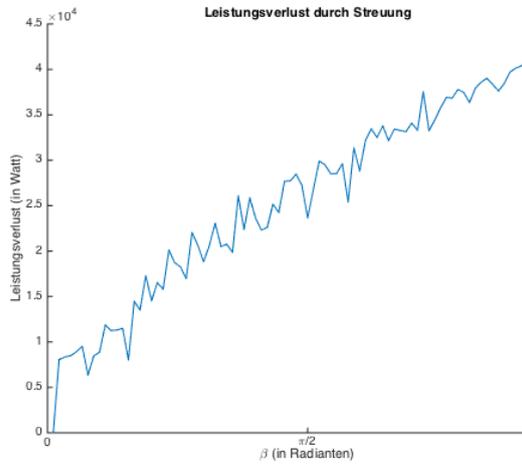
```

1: procedure HAUPTBERECHNUNG
2:   Erstelle Arrays
3:   for  $i = \text{Startwinkel}$  to  $\text{Endwinkel}$  in  $\text{Winkelschritt}$  do
4:     Berechne Einzelverluste(i)
5:     Addiere Einzelverluste(i) zu Gesamtverlust(i) auf
6:     if Gesamtverlust(i) < Gesamtverlust(i- $\text{Winkelschritt}$ ) then
7:       MinimalerWinkel  $\leftarrow$  i
8:   Gib Plots mit Ergebnissen aus
9:   return MinimalerWinkel

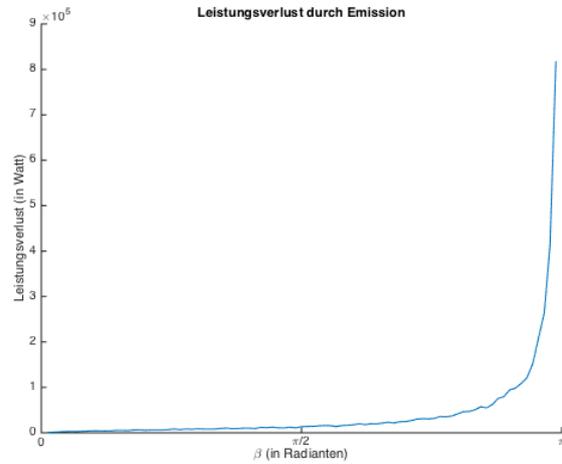
```

¹²Diese abschließende Berechnung kann wie anfangs erwähnt als eigene Prozedur erstellt werden, oder wie in Anhang B.1, in der *main* implementiert werden.

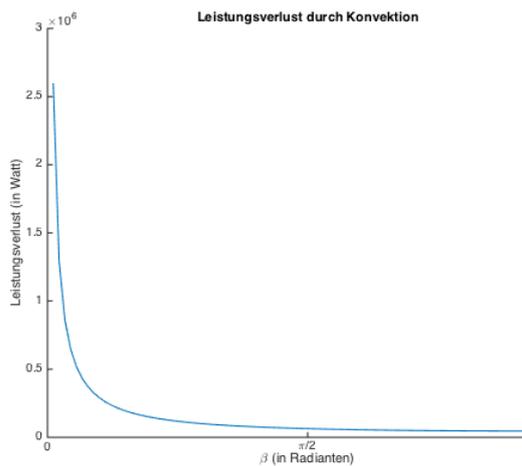
Für die Interpretation bietet es sich an, dass der Winkel des minimalen Energieverlustes vom Programm selbst ausgegeben wird, aber auch alle Verluste im Verhältnis zu dem Winkel unter dem diese auftreten in einem Plot ausgegeben werden (siehe Abb. 17).



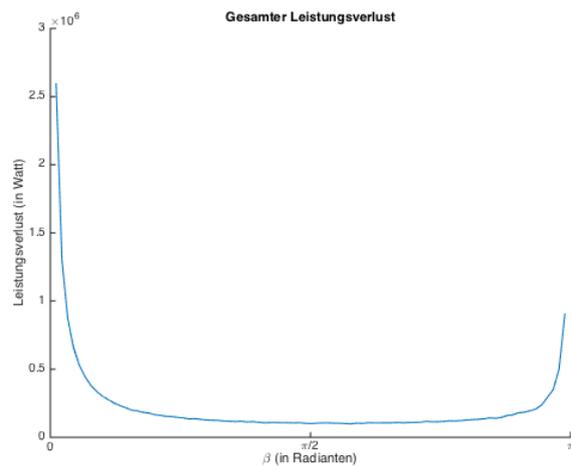
(a) Streuung



(b) Emission



(c) Konvektion



(d) Gesamt

Abb. 17: Endergebnis Plots der Energieverluste

3.3.9 Interpretation der Ergebnisse

Die Energieverluste, die aufgrund von Reflexion bzw. Streuung entstehen, sind in Abb. 17a zu erkennen. Auffällig ist dabei einerseits, dass durch einen größeren Öffnungswinkel die Verluste zunehmen, andererseits, dass der Verlauf nicht linear ist, sondern in einem auffälligen *ZickZack*-Muster verläuft.

Ersteres lässt sich logisch dadurch erklären, dass sich durch einen größeren Winkel die Öffnung des Kelches vergrößert, weshalb weniger reflektierte Strahlen aufgefangen werden können. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da bei einem Winkel von 180° keine Pyramiden mehr vorhanden sind, sondern eine glatte Oberfläche zu erkennen ist. Was nicht genauer untersucht wurde, ist, was passiert, wenn der Winkel gegen 0° läuft. Das interessante bei diesem Grenzwert ist, dass durch die Verkleinerung des Öffnungskelches, die Anzahl der Pyramidenspitzen zunimmt und sich die Geometrie ebenfalls zu einer glatten Oberfläche entwickelt. Dies spielt jedoch für die durchgeführte Untersuchung keine Rolle, da in diesem Fall, der in der Aufgabenstellung erklärte Aufbau einer von der Innenseite mit Wasser durchströmten Pyramide, nicht mehr umsetzbar ist. Der Verlauf und die Ausprägung des *ZickZack*-Musters ist davon abhängig, in welchen Winkelschritten wir die Untersuchung durchführen. Dies gilt sowohl für die Öffnungswinkel, als auch für den Winkel zwischen den reflektierten Strahlen. Je kleiner diese Schritte gewählt werden, also je genauer die Berechnung durchgeführt wird, umso mehr nähert sich der gezackte Plot einem linearen Verlauf an. Ebenfalls hat die gewählte Konvergenzschranke einen geringen Einfluss auf diesen Verlauf. Hierfür gilt ebenfalls, je kleiner diese gewählt wird, desto genauer wird die Berechnung durchgeführt und damit werden die Zacken, die im Plot auftreten, verkleinert.

Bei den Emissionsverlusten ist ein exponentieller Verlauf, der bei 180° eine Asymptote zu besitzen scheint, zu erkennen (Abb. 17b). Dies hat vor allem zwei Ursachen: Da dieser Unterpunkt wieder ein Strahlenproblem ist, wie auch bei den Streuverlusten schon erklärt, treten bei einem größeren Winkel höhere Verluste auf. Der interessante Unterschied ist hierbei jedoch die verschiedene Intensität der Strahlen, die von der Temperatur der Oberfläche abhängig ist. Da am tiefsten Punkt des Kelches die höchste Temperatur herrscht, werden von dort auch die intensivsten Strahlen emittiert. Da jedoch die gegenüberliegende Seite einen Großteil dieser Strahlen wieder auffängt, gerade bei kleinen Winkeln, sind die Verluste hier aber deutlich geringer als beispielsweise an der Spitze des Kelches, wo schwächere Strahlen emittiert werden, aber auch mehr als die Hälfte der gestreuten Strahlen verloren wird.

Ein ebenfalls exponentieller Verlauf tritt bei den Konvektionsverlusten auf, jedoch in entgegengesetzter Richtung mit einer Asymptote bei 0° (Abb. 17c). Diese Tendenz ist damit zu erklären, dass die Oberfläche bei einem kleiner werdenden Winkel exponentiell zunimmt und da die auftretenden Energieverluste maßgeblich von der Oberfläche abhängig sind, stehen diese beiden Größen in Korrelation zueinander.

Die abschließende Betrachtung der Gesamtverluste (Abb. 17d), gestaltet sich auf den ersten Blick recht einfach, da dies einfach die Summierung der Einzelverluste ist. So erkennt man an den Randpunkten 0° und 180° ein asymptotisches Verhalten, was nicht weiter von Interesse ist, da in diesen Fällen die vorgegebene Geometrie nicht umsetzbar ist. Der Bereich, der für diesen Problem wirklich von Interesse ist befindet sich daher

eher von 20° bis 160° .¹³ Auf diesem Teilstück wird nun also der Winkel, bei dem das Minimum der Energieverluste auftritt gesucht. Jedoch muss man hierbei beachten, dass dieser Winkel in Abhängigkeit von der Dimensionierung bzw. Gewichtung der Verluste der Einzelprobleme steht. Geht man zum Beispiel von einer höheren Strahlenintensität aus, so wird sich der optimale Winkel zugunsten dieses Teilproblems verkleinern. Geht man von anderen Temperaturwerten des Materials oder der Luft aus, wird sich der Winkel ebenfalls verhältnismäßig verändern.

3.3.10 Optimierung des Öffnungswinkels mittels Newton-Verfahren

Hier soll ein kurzer Exkurs zum Newton-Verfahren¹⁴ für Optimierungsprobleme gegeben werden. Dies ist nötig, da wir zwar mit unserer Lösung einen minimalen Wert aus der Menge der untersuchten Winkel gefunden haben, es aber durchaus möglich ist, einen besseren Winkel zu finden. Dieser unterscheidet sich zwar nur geringfügig von dem in unserer Lösung gefundenen, doch macht diese Untersuchung dennoch Sinn, wenn man die Dimension der Energieverluste betrachtet, die auch durch eine solche minimale Änderung auftritt. In diesem Fall geht es um die Lösung des Gleichungssystems

$$F(x) := \Delta f(x) = 0$$

wobei $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion ist.

Algorithm 6 Newton-Verfahren für Optimierungsprobleme

```

1: Gegeben: Startwert  $x_0 \in \mathbb{R}^m$ 
2: for  $k = 0, 1, 2, \dots$  do
3:   if  $\Delta f(x_k) = 0$  then
4:     STOP
5:   else
6:      $d_k = -\Delta^2 f(x_k)^{-1} \Delta f(x_k)$ 
7:      $x_{k+1} = x_k + d_k$ 
8: return  $x_0, x_1, x_2, \dots$ 

```

Das Ziel des Algorithmus ist es, schrittweise die Minimalstelle der Verlustfunktion numerisch zu lösen. Da diese Funktion jedoch noch nicht existiert und die Plots bisher nur aus einzelnen Punkten bestehen, muss eine Funktion interpoliert werden, die mit dem vorgestellten Verfahren ausgewertet werden kann. Dieser Schritt ist allerdings nicht sonderlich aufwendig, da dies in *MATLAB* mit dem Befehl *polyfit* bereits implementiert ist. Hilfreich ist, dass uns die Daten in Array geordnet vorliegen. Somit lautet die Vorschrift für die Interpolation der Polynomfunktion f von Grad $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = a_1 \cdot x^n + a_2 \cdot x^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot x + a_{n+1}.$$

¹³Selbst dies scheint noch großzügig gewählt, da auf die Fertigungsverfahren geachtet werden muss.

¹⁴Für eine genauere Erklärung: [6], Harrach, 2014, S.34-41, daraus auch der Algorithmus; [3], Dahmen, 2008, S.190-199

Dabei werden die Koeffizienten a_i mittels *polyfit* bestimmt

$$a = \text{polyfit}(x, y, n),$$

wobei diese in folgender Form vorliegen

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_{n+1}).$$

Dazu werden die Daten aus dem Ergebnisarray benötigt:

$$x = (x_1, x_2, \dots) \text{ untersuchte Winkel}$$

$$y = (y_1, y_2, \dots) \text{ Gesamtverluste zu untersuchten Winkeln.}$$

Entscheidend für die Auswertung ist die Wahl des Grades der Funktion. Je größer n gewählt wird, desto genauer wird auch die Berechnung, doch dauert diese auch länger. Ebenso ist bei der Betrachtung des Verlaufs der Verluste darauf zu achten, dass n gerade ist.

4 Unterrichtseinsatz

Wie sich anhand des Umfangs des Lösungswegs schon zeigt, ist eine Realisierung des Projekts im normalen Unterricht nicht möglich. Ebenso dürfte es Probleme bereiten, wenn man das Projekt mit einer normalen Klasse durchführen möchte, da die Interessen und Stärken der SchülerInnen sehr unterschiedlich sein dürften und die Fragestellung trotz der Interdisziplinarität nicht jeden ansprechen und motivieren wird. Daher bietet es sich an, dieses Projekt außerhalb des fachlichen Unterrichts, in einem speziellen Rahmen, durchzuführen. Dazu sollen im Folgenden einige gemeinsam erarbeitete Überlegungen näher beschrieben werden, die für eine Durchführung geeignet scheinen:

Eine Möglichkeit dafür wäre der Einsatz in einer AG. Der Vorteil dieser Bearbeitungsform, ist die ausreichend vorhandene Zeit, um eine Lösung zu finden und die Möglichkeit, die Aufgabenstellung immer weiter zu verfeinern und diese unter Umständen zu erweitern. Jedoch ist, je nach Regelmäßigkeit der AG und der täglich zur Verfügung stehenden Zeit, die Gründlichkeit der Bearbeitung recht beschränkt. Eine Idee wäre hierbei jedoch, dass man sich zwar wöchentlich trifft, um Fragen zu beantworten, die Arbeit jedoch größtenteils von den SchülerInnen zuhause erledigt wird. Zusätzlich sollte zu Beginn ein zeitlich deutlich umfangreicherer Block, in dem die komplexe Problemstellung aufgearbeitet wird, und nach einem gewissen Zeitraum (z.B. monatlich), ein weiterer Block zum Austausch der Gruppen, stattfinden. Bei der Wahl dieser Form sollte die Gruppe, je nach Anzahl der betreuenden Lehrkräfte nicht zu groß gewählt werden. Es bietet sich an pro Lehrkraft maximal 6 SchülerInnen aufzunehmen, die in 2er oder 3er Gruppen zusammenarbeiten sollten. So ist gewährleistet, dass die Fragen der Gruppen ausreichend beantwortet werden können. Je nach Fragestellung kann auch eine weitere Lehrkraft für eine oder mehrere AG-Sitzungen hinzukommen, um den speziellen Unterpunkt zu bearbeiten. Die SchülerInnen und Lehrkräfte können sich in dieser Form auch sehr gut auf die nächste Sitzung vorbereiten oder Unterpunkte in der Freizeit bearbeiten. Die Lehrkräfte haben darauf zu achten, dass die SchülerInnen das Problem größtenteils alleine lösen und dabei auch durchaus an ihre Frustrationsgrenze kommen, jedoch nicht ihre Motivation verlieren. Dabei gilt: „So wenig helfen wie möglich, so viel wie nötig“.

Eine weiteres mögliches Szenario ist die Umsetzung während einer Projektwoche. Diese Art der Umsetzung ist ähnlich zur ursprünglichen CAMMP week, mit der Ausnahme, der fehlenden speziellen fachlichen Betreuung. Jedoch sollte diese durch die vorliegende Arbeit und dem darin angebotenen Lösungsweg ausreichend ersetzt sein. Bei dieser Form der Anwendung sollte darauf geachtet werden, dass die Gruppe nicht zu groß wird, da der Austausch der SchülerInnen sonst gefährdet ist. Es ist nicht empfehlenswert das Problem mit Frontalunterricht zu lösen, sinnvoller ist die Arbeit in Expertengruppen. Weil die Probleme diskutiert und auch am PC umgesetzt werden müssen, sollten die SchülerInnen in Gruppen von maximal 3 Personen zusammenarbeiten und die gesamte Gruppengröße 12 Personen nicht überschreiten, damit diese Gruppen auch von den Lehrkräften betreut werden können. Natürlich kann das Problem von einer Lehrkraft betreut werden, jedoch bedeutet dies einen großen Aufwand, da die Problematik

und die Herangehensweise an die Problemstellung für die meisten SchülerInnen vollkommen neu sein dürfte. Daher erscheint eine Betreuung in einem Team von 2-4 Lehrkräften sinnvoller, zumal die Problematik interdisziplinär ist und die Lehrkräfte, je nach Fachrichtung, so bei den einzelnen Unterpunkten besser helfen können. Dies ist auch vor dem Hintergrund wichtig, dass vermutlich einige Sachverhalte den Schulstoff übersteigen oder (noch) nicht unterrichtet wurden. Bei der Lösung unter der Woche sollten die Lehrkräfte darauf achten, dass die SchülerInnen durchaus gefordert, aber nicht hilflos überfordert sind. So ist es ein wichtiges Konzept, dass während der Bearbeitung zwar eine gewisse Frustration aufkommen kann (wie bei der Bewältigung realer Probleme), diese sollte jedoch nicht so weit führen, dass die SchülerInnen die gesamte Motivation verlieren. Auch hier gilt für die Lehrkräfte: „So wenig helfen wie möglich, so viel wie nötig“. Dies gilt auch im Hinblick auf die begrenzte Bearbeitungszeit und einer dennoch zufriedenstellenden Lösung.

Von einem Einsatz an einzelnen Projekttagen ist eher abzusehen, da das Problem insgesamt zu komplex ist und zu viel Zeit benötigt, bis es in seiner Gesamtheit verstanden werden kann. Allerdings könnte man diesem Hindernis vorbeugen, indem man mehrere Projekttag einrichten und die einzelnen Unterpunkte des Problems an Expertengruppen aufteilen würde. Hierbei sind jedoch vermutlich mindestens 4 Tage und die Motivation der Schüler sich außerhalb der Schulzeit mit dem Problem zu beschäftigen nötig. Der Nachteil gegenüber einer Projektwoche ist, dass die SchülerInnen sich nicht durchgängig mit der Aufgabe beschäftigen können und vermutlich bei jedem Projekttag einen neuen Einstieg benötigen.

Eine relativ neue Möglichkeit ist es das Projekt in der Sekundarstufe II in einem Projektkurs¹⁵ umzusetzen. Hierbei sind die Probleme und Vorteile vergleichbar mit denen, die bei einer AG auftauchen können. Die Schwierigkeit bei dieser Unterrichtsform ist, dass die Lehrkraft sich einen Maßstab für die Leistungsbeurteilung überlegen muss. Dieser sollte jedoch nicht maßgeblich von dem Ergebnis der Schüler abhängen, sondern sich eher auf den Prozess der Bearbeitungsphase, eingebrachte Ideen, Lösungsstrategien und den Modellierungsprozess beziehen. Auch muss dieses Projekt nicht das einzige sein, das während des Kurses bearbeitet wird.

Wichtig ist es, bei jeder dieser Unterrichtsformen, den Austausch und die Kommunikation der Gruppen gut zu koordinieren. So wurde von den SchülerInnen auf der CAMMP week ein git-Repository¹⁶ eingerichtet, über das die Quelltexte der Gruppen ausgetauscht, aktualisiert und gesichert werden konnten. Dies ist wohl die eleganteste, aber auch aufwändigste Methode, da man erst einen git-Server einrichten muss. Sicherlich funktioniert der Austausch auch über einen Server oder ein lokales Medium wie einen USB Stick, doch diese Methode bietet deutlich mehr Raum für Fehler und ist während des Programmierungsvorgangs deutlich lästiger für die Gruppen und auch die Lehrkraft.

¹⁵Siehe dazu: <https://www.schulministerium.nrw.de/docs/Schulsystem/Schulformen/Gymnasium/Sek-2/FAQ-Projektkurse/index.html>, zuletzt zugegriffen: 06.02.2016

¹⁶Für einen einfachen Einstieg in git siehe: <https://rogerdudler.github.io/git-guide/index.de.html>, zuletzt zugegriffen: 06.02.2016

5 Zusammenfassung

5.1 Bewertung der Einsetzbarkeit

Um das Projekt schlüssig und kritisch bewerten zu können, habe ich mich mit der Lehrkraft, die die Schülergruppe auf der CAMMP week betreut hat, hinsichtlich dem Schwierigkeitsgrad, der aufgetretenen Probleme, der Motivation, der Durchführbarkeit und der Anforderungen an die Lehrkraft ausgetauscht. Im Folgenden sollen die gemeinsam erarbeiteten Ergebnisse und Bewertungen genauer ausgeführt werden:

Zum Schwierigkeitsgrad kann man sagen, dass das Problem insgesamt sehr komplex ist und daher eine lange Einarbeitungszeit notwendig ist. Ebenso ist die Interdisziplinarität zwar ein sehr schöner Punkt, um den SchülerInnen den Realitätsbezug der schulischen Inhalte aufzuzeigen, doch kann diese ein tiefgehendes Verständnis der Aufgabe erschweren. Allerdings ist dadurch das Problem auch gut zu untergliedern. Dies kann nicht nur anhand der physikalischen Effekte, sondern auch mittels der Geometrie oder der Herangehensweise erfolgen. Viele dieser Punkte übersteigen jedoch die Lerninhalte des Schulunterrichts um ein großes Maß.

Dies führt auch schon zu den Problemen, die bei der Bearbeitung auf der CAMMP week auftraten. Die erste große Schwierigkeit war die Erfassung der Thematik auf theoretischer Ebene. Da kein Experiment durchführbar ist, welches das Problem verdeutlichen oder spezifizieren kann, war es für die SchülerInnen im ersten Moment sehr schwierig das Problem in seiner gesamten Tiefe, mit allen physikalischen und technischen Besonderheiten, zu verstehen. Daher musste viel Zeit aufgewendet werden, um die physikalischen Effekte zu erklären und auch um deren konkreten Einfluss auf die Problemstellung aufzuzeigen. Dies hing beispielsweise damit zusammen, dass Effekte wie Konvektion und Emission in der Schule bisher nicht behandelt wurden, aber auch deren Gewichtung bei der Verlustrechnung nicht sofort verständlich war. Daher gestaltete sich die Suche nach geeigneten Formeln als weiteres Problem. Ebenso fehlte bei der Hälfte der Gruppe ein Verständnis zur Vektorrechnung und deren Anwendung. Neben diesen fachlichen Problemen ist es auch schwierig die Probleme qualitativ zu bewerten, da kein Experiment möglich war, mit dem man das berechnete Ergebnis hätte abgleichen können. Dies ist auch ein kritischer Punkt im Hinblick auf den Modellierungskreislauf, da dadurch eine Interpretation und Validierung erheblich schwieriger bzw. sogar unmöglich wird.

Die Motivation der SchülerInnen ist zu Beginn des Projekts nicht problematisch, vermutlich sogar sehr hoch, da die Fragestellung nicht nur einen Wirklichkeitsbezug besitzt, sondern auch mit einer hohen Aktualität aufgrund der Debatte um erneuerbare Energien und die Energiewende daherkommt. Die Motivation wird jedoch im Verlauf, wenn ihnen klar wird, wie viel Aufwand bevorsteht, zu einem, wenn nicht dem entscheidenden Faktor, von dem der Erfolg des Projekts abhängt. Diese sicherzustellen ist die primäre Aufgabe der Lehrkraft in der Bearbeitungsphase.

Die Durchführbarkeit hängt also von vielen Faktoren ab. Positiv ist dabei eine recht simple Geometrie, die durch die Reduzierung noch weiter vereinfacht werden kann. Ebenfalls ist durch die Aktualität der Aufgabenstellung eine hohe Motivation der SchülerInnen zu erwarten. Da das Projekt jedoch mit dieser Motivation steht und fällt ist der hohe Schwierigkeitsgrad, der häufig zu ernüchternden oder gar frustrierenden Situationen führen kann, das größte Hindernis bei der Realisierung. Eine erfolgreiche Bearbeitung der Aufgabenstellung kann daher nur mit starken Schülergruppen und SpitzenschülerInnen erfolgen. Ebenfalls ist der sehr hohe Zeitbedarf zu beachten, der nötig ist, um eine zufriedenstellende Lösung zu finden.

Die durchführende Lehrkraft muss sich von Beginn an von der Vorstellung lösen, Experte für das Problem sein zu müssen. Durch die offene Fragestellung gibt es viele Lösungswege und Herangehensweisen, die zwar richtig sein können, aber nicht bedacht wurden und auch nicht in dieser Lösung aufgeführt sind. Dennoch sollte das Gesamtproblem erfasst werden, damit den SchülerInnen zur richtigen Zeit geholfen werden kann. Diesen Zeitpunkt zu finden ist nicht immer unbedingt einfach (siehe Kap. 4), da eine gewisse Frustration gelegentlich bei den SchülerInnen durchaus erwünscht ist. Eine weitere Rolle der Lehrkraft ist es, die theoretischen Grundlagen bei den SchülerInnen zu schaffen. Damit ist gemeint, dass schulische Inhalte, wie z.B. Vektorrechnung und Strahlenlehre, so beigebracht werden, dass das Problem gelöst werden kann und ein Verständnis dafür geschaffen wird, es aber nicht zu viel Zeit in Anspruch nimmt. Des Weiteren zählt zu den Aufgaben der Lehrkraft das Vermitteln von Methodenkenntnissen, die teilweise nicht im Lehrplan verankert sind. Dazu zählt die eigenständige Heranführung an neue Inhalte, sich diese schnell anzueignen, Probleme aufzuteilen, die Unterpunkte getrennt voneinander zu betrachten, zu bearbeiten und wie man sich bei umfangreicheren Projekten organisiert. Ebenso darf sich die Lehrkraft nicht entmutigen lassen, wenn sie selbst von Teilproblemen überfordert werden sollte oder die Schülergruppe keinen Fortschritt erkennen lässt. In diesem Fall soll diese Ausarbeitung der Lehrkraft die nötige Sicherheit und neue Ideen geben.

Insgesamt kann man das Projekt als vollkommen positiv und gelungen bewerten. Alle Tiefpunkte und Rückschläge gehören genauso dazu, wie ein gelungenes Ergebnis abzuliefern. Die SchülerInnen können erstmals einen Einblick gewinnen, was es bedeutet Forschung zu betreiben und die Mathematik, Physik und Informatik losgelöst von Schule und Unterricht zu betrachten. So werden Probleme in einer Gemeinschaft gelöst und nicht von jedem für sich alleine. In diese Gemeinschaft werden auch die Lehrkräfte mit eingebunden, wodurch die Möglichkeit für angeregte und gehobene Diskussionen geschaffen wird, die sich im Unterricht selten ergibt. Auch ist die Lehrkraft durch ihre Rolle als Motivator, Moderator und Berater, statt Experte zu sein, viel freier im Diskurs und Umgang mit den SchülerInnen. Dadurch ist die Chance gegeben, dass nicht nur die SchülerInnen von der Lehrkraft lernen, sondern auch die Lehrkraft von den Schülern.

5.2 Vermittelte Lerninhalte und Kompetenzen

Der Vorteil interdisziplinärer Modellierungsaufgaben ist, dass deutlich mehr Kompetenzen, als nur die offensichtlich beanspruchte Modellierungskompetenz, gefördert werden. Dieses Zusammenspiel soll im Folgenden kurz vor dem Hintergrund der behandelten Aufgabe analysiert und mit den geforderten allgemeinen Kompetenzen der Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (vgl. [8], Kultusministerkonferenz, 2003, S. 8f.), den prozessbezogenen und den inhaltsbezogenen Kompetenzen der Kernlehrpläne für die gymnasiale Oberstufe des Landes Nordrhein-Westfalen (vgl. [11], Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2007, S. 19ff) abgeglichen werden.

Die Kompetenzen der Kultusministerkonferenz sind während der Bearbeitung der Aufgabe allgegenwärtig:

Da die SchülerInnen vor einem offenen Problem stehen, ohne dass dieses in den Kontext einer Unterrichtsreihe gebettet werden kann, müssen sie selbst Mittel und Strategien zu Lösung entwickeln. Der Modellierungskreislauf soll ihnen dabei eine erste Hilfe sein. Somit wird die Kompetenz **K 3** *mathematisch modellieren* klar gefordert. Um ein mathematisches Modell erstellen zu können, ist jedoch die Kompetenz **K 4** *mathematische Darstellungen verwenden* erforderlich. Die anschließende Bearbeitung der Fragestellung und innermathematischen Probleme benötigt die Kompetenz **K 3** *Probleme mathematisch lösen*, zu der auch das Reflektieren der erzielten Ergebnisse gehört. Während dieses Prozesses sind aufgrund der vielfältigen und komplexen Rechnung die Kompetenzen **K 5** *mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* und **K 1** *Mathematisch argumentieren* von Nöten, womit die Begründung mathematischer Lösungswege gemeint ist. Nicht zu verwechseln ist dies mit der Kompetenz **K 6** *Kommunizieren*, die auch sehr wichtig ist, da das Problem in einer größeren Gruppe gelöst werden muss, in der sich häufig abgestimmt und informiert werden muss.

Diese Kompetenzen finden sich auch alle in den Kernlehrplänen des Landes Nordrhein-Westfalen wieder, werden dort jedoch etwas ausführlicher behandelt und ergänzt. So wird die Problemlösungskompetenz untergliedert in *Erkunden*, *Lösen* und *Reflektieren*. Darin ist also auch die Recherche und Beschaffung weiterführender Informationen enthalten. Ebenso gehört dazu die Entwicklung und Anwendung unterschiedlicher Lösungsstrategien und die Wahl heuristischer (mathematischer) Hilfsmittel. Eine weitere Ergänzung ist die *Benutzung von Werkzeugen*. Diese ist bei dieser Aufgabe unumgänglich. So werden klassische Werkzeuge, wie Papier, Formelsammlung, Taschenrechner für einen ersten Lösungsansatz benötigt, diese Lösungen müssen jedoch so weiterentwickelt werden, dass sie am Computer, hier in *MATLAB* oder einer anderen Programmiersprache, genutzt werden können.

Inhaltlich wird vor allem das Inhaltsfeld **A** *Funktionen und Analysis* der Kernlehrpläne bzw. die Leitideen **L 3** *Raum und Form* und **L 4** *funktionaler Zusammenhang* der Kultusministerkonferenz behandelt. Dabei nimmt die *Vektorrechnung* eine tragende Rolle ein. Diese wird sowohl zur Darstellung bei der Modellierung als auch für gerichtete Größen genutzt. Ebenso sind hierbei geometrische Zusammenhänge und trigonometri-

sche Funktionen und deren Anwendung auf Vektoren wichtig. Für die Auswertung der Emissionsverluste ist die *Integralrechnung* notwendig. Außerdem wird die Erstellung und Auswertung von *Diagrammen und Grafiken* für eine abschließende reflektierte Betrachtung und Präsentation der Ergebnisse benötigt.

Darüber hinaus fördert der ausführliche Umgang mit komplexen Modellierungsaufgaben die Fähigkeit der (Projekt-) Organisation der SchülerInnen und hilft auch im interdisziplinären Kontext zum Verständnis von fächerübergreifenden Themen und den vorherrschenden Zusammenhängen.

6 Ausblick

Abschließend soll noch ein Blick auf die weiteren Möglichkeiten, die das Projekt bietet, geworfen werden. Durch die Komplexität und auch die Offenheit der Problemstellung ist den SchülerInnen viel Raum gegeben eigene Lösungen zu entwickeln und selbst Schwerpunkt zu setzen. So können Unterpunkte und Teilaspekte, die eventuell spannender erscheinen oder zu denen die Schüler einen besseren Zugang haben, tiefergehend bearbeitet oder erweitert werden. Insbesondere könnte die Geometrie der Oberfläche genauer untersucht werden. Fragen dazu können sein, ob es sinnvoller ist große und kleine Pyramiden zu kombinieren, ob eine sechseckige Grundfläche optimal ist oder, ob Pyramiden überhaupt die beste Form sind und nicht etwa elliptische/abgerundete Körper. Außerdem kann versucht werden die bestehenden Algorithmen zu optimieren, um eine Berechnung genauer und schneller durchführen zu können. Ebenfalls ist die Optimierung des Winkels, die zwar kurz in dieser Arbeit behandelt wurde, noch in das Programm zu implementieren.

Es war sogar eine Überlegung die SchulerInnengruppe mit diesem Projekt bei *Jugend forscht* anzumelden, was jedoch aus zeitlichen Gründen nicht funktioniert hat. Doch ist dies weiterhin denkbar, wenn sich eine begabte Gruppe und genügend Motivation für das Projekt findet. Dies könnte dann in Kooperation mit der RWTH Aachen und dem CCES umgesetzt werden, um den SchülerInnen die Möglichkeiten des wissenschaftlichen Umfeldes zugänglich zu machen.

Anhang

A. Präsentationen

Anhang A.1: Präsentation Modellierung



Welcome to CAMMP!
Problem Solving using Modeling and Simulation

Prof. Dr. Ahmed E. Ismail
Aachener Verfahrenstechnik | Molecular Simulations and Transformations



Mathematical Modeling: What is it?

- How do we go about solving a problem?
- In science, one tool for problem solving is *mathematical modeling*
- We use mathematics to devise a “representation” of our problem in terms of equations that we can attempt to solve.
- If we can find a solution, is it even correct?
- How do we make sure?

Problem solving is an iterative process

Real-world problem

Sample Problem: Safety cameras

Can we determine how fast a car is moving from safety camera images?

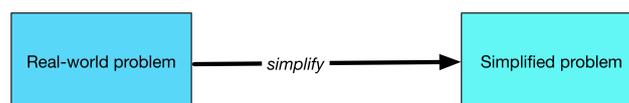


Source: Wikimedia Commons, Library of Congress

Step 1: The real-world problem

- What do you already know?
- What do you need to determine?
- What constraints do you have to deal with?
 - What features does your solution need to include?
 - What resources (time, computers, coworkers, information) do you have available to come up with a solution?

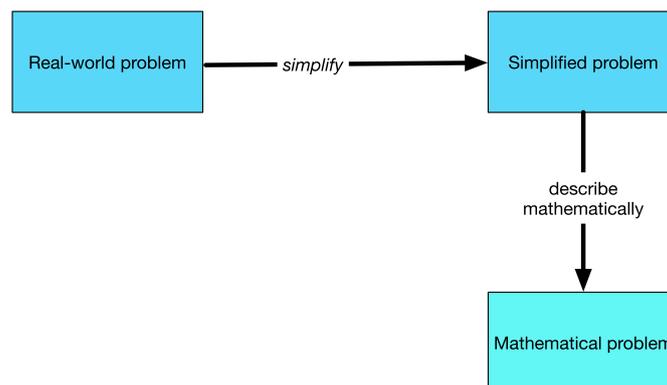
Problem solving is an iterative process



Step 2: Simplify the problem

- The full problem might be too hard: **Simplify!**
 - **Assumptions** introduce **new information**
 - Needed when you don't have enough data to enable a solution
 - *Example:* The car is traveling at constant velocity and does not accelerate.
 - **Simplifications** make the math simpler
 - We treat the image of the car as a rectangle or trapezoid instead of finding the complete outline.
- Einstein: “Models should be as simple as possible, **but no simpler!**”

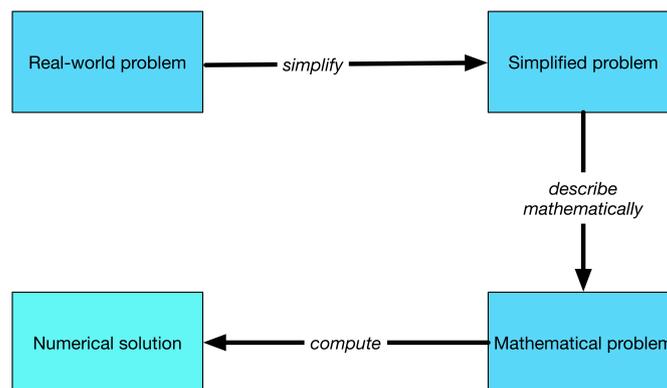
Problem solving is an iterative process



Step 3: Describe your model mathematically

- Convert your real-world system into a set of mathematical equations to be solved
- How do you *quantify* the problem?
- Don't forget to take **all** of your known data, assumptions, simplifications, and constraints into account!
- After you've built the system, you'll need to figure out how to solve it!

Problem solving is an iterative process

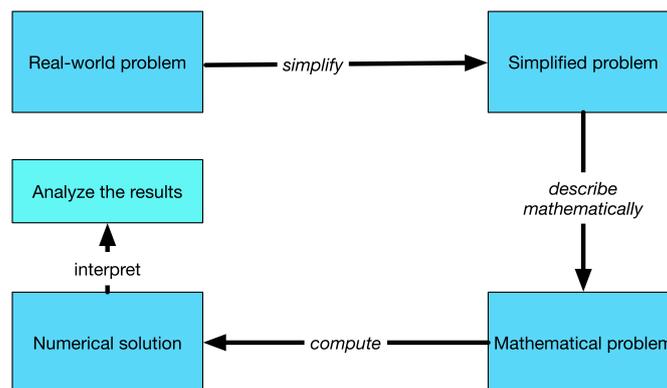


Step 4: Solve your model

Analytical versus numeric solutions

- For a very small number of problems, an exact analytical solution is available
- These special cases usually involve very “simple” problems
 - Symmetric geometries
 - No “special conditions” (no reactions, no heat loss, no time-dependence, etc.)
- When an analytical solution is unavailable, a numerical solution is required
- For CAMMP, you’ll be using **Matlab** to solve your problems

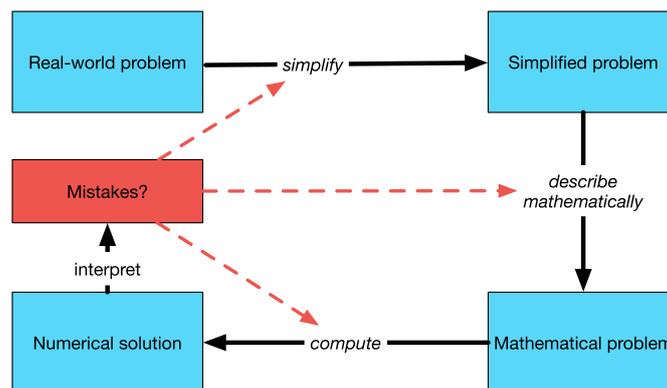
Problem solving is an iterative process



Step 5: Analyze your results

- Check the solution
 - Is the solution consistent with the given data and assumptions?
 - Does the solution satisfy all your constraints and requirements?
- Example: If the car is moving at 0.01 km/h or 1500 km/h, something's probably wrong!
- Can you test your method with a simple “test” problem before solving the bigger problem?

Problem solving is an iterative process



Step 6: Refine your model, if needed

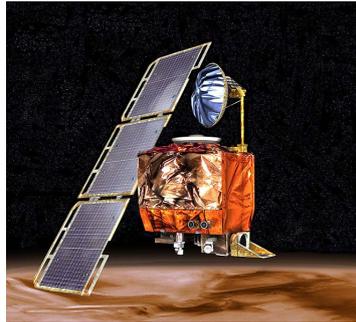
- If you didn't find a valid solution the first time, or are not satisfied with the solution, try again
 - Did you make an invalid assumption or simplification of the problem?
 - Did you make a mistake converting your problem into mathematics?
 - Did you solve the problem incorrectly?
 - Is there a bug in your code?
- **Don't be afraid of making a mistake!**

Who uses modeling?

- Every major branch of science and engineering now uses mathematical modeling
- Many businesses and industries use it, too
- One cool example: astrophysics!

Why testing and checking are important

Mars Surveyor '98

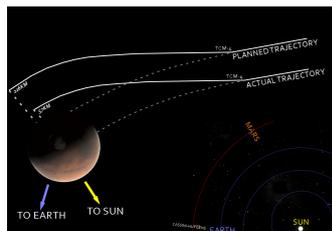


NASA

- Mars Climate Orbiter was supposed to measure the atmosphere and surface features of Mars
- Reported as “lost in transit”
- NASA personnel reported probe was at too low an altitude relative to the planet

Why testing and checking are important

Mars Surveyor '98



NASA

- Problem traced to an error in units handling
- Probe probably disintegrated due to stresses created flying through atmosphere instead of in exoplanet orbit

Why testing and checking are important

Mars Surveyor '98



NASA

- Mars Polar Lander was supposed to explore the polar geology
- Never made contact after “landing”
- Most likely cause: vibrations due to deployment of landing gear was interpreted by software as “touchdown”
- Polar lander fell to surface from 40 m instead of 12 m
- Polar lander became “Polar smasher”

Getting it right

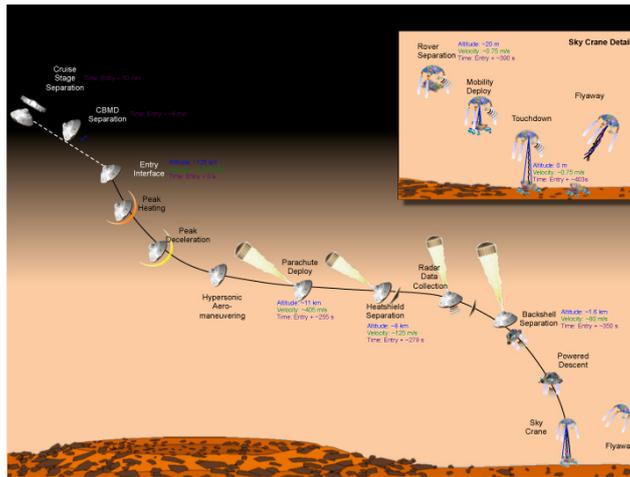
Mars Curiosity



Source: JPL

Getting it right

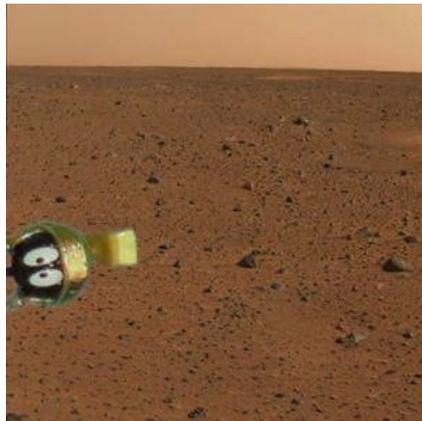
Mars Curiosity



Source: NASA

Getting it right

Mars Curiosity



Source: NASA

"Zum Schluß"

Remember:

- Mathematical modeling and simulation is not a spectator sport!
- Have fun!

Anhang A.2: Problemstellung

CAMMP week 2015
powered by Bürgerstiftung



RWTH AACHEN
UNIVERSITY

Optimales Design eines Strahlenfallenreceivers

Torsten Trimborn

&



Lehrstuhl für Wärme und Stoffübertragung

Die erneuerbaren Energien gewinnen seit Jahren immer mehr an Bedeutung. Eine Möglichkeit der regenerativen Energieerzeugung bieten die so genannten solarthermischen Kraftwerke. Das Prinzip ist simpel: Das Sonnenlicht wird durch mehrere Spiegel auf einen Receiver gebündelt. In dem Receiver wird das Wasser erwärmt und es entsteht Wasserdampf. Der Wasserdampf treibt dann eine Turbine zur Stromgewinnung an.

Der Wirkungsgrad von solarthermischen Kraftwerken liegt leider noch deutlich hinter konventionellen Kraftwerken zurück. Um dies zu ändern arbeiten Wissenschaftler und Firmen an der Optimierung einzelner Komponenten, wie z.B. der optimalen Spiegelaufstellung.

Wir möchten uns mit dem optimalen Design eines Receivers beschäftigen. Hierbei betrachten wir den sogenannten Strahlenfallenreceiver.

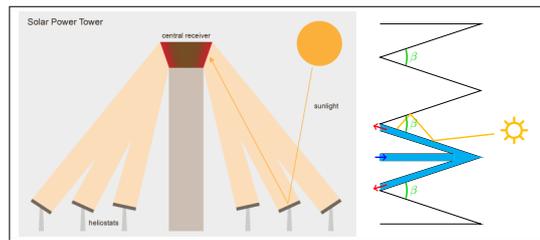


Solarthermisches Kraftwerk Planta Solar 10 (PS10) (links) und das Kraftwerk Planta Solar 20 (rechts) in Spanien. (Quellen: wikipedia.org; cityodat.blogspot.com)

Problem: Im Gegensatz zu einem konventionellen Receiver, der eine *glatte* Oberfläche hat, besitzt der Strahlenfallenreceiver Pyramiden (bzw. Dreiecke in zwei Dimensionen). Wie der Name schon sagt, sollen die Sonnenstrahlen durch diese Geometrie gefangen werden. Genauer gesagt möchte man den Energieverlust durch **Konvektion**, **Reflexion** und **Emission** minimieren.



Die Pyramiden bestehen aus gleichschenkligen Dreiecken, der Öffnungswinkel zwischen den Pyramiden bezeichnen wir mit β .



Schematische Darstellung eines solarthermischen Kraftwerks (links) und Skizze eines Strahlenfallenreceivers mit Öffnungswinkel β . (Quelle: wisions.net)

Fragen: Welcher Öffnungswinkel β ist optimal um die Wärmeenergie zu maximieren? Ist es sinnvoll, große und kleine Pyramiden (Dreiecke) zu mischen?

B. MATLAB Codes

Anhang B.1: Main

```
1 clear all
2 clc
3 zeichnen = true;           %Beispielhafte Anzeige fuer Reflexion und ↔
   Emission
4 if zeichnen;
5     axis equal;
6 end
7
8 %Eingabe der Werte fuer die Berechnung
9
10 h = 0.5;                   %fixierte Hoehe der Zacken
11 ys = h;                    %y-Koordinate des Anfangsstrahls
12
13 xv = 0;                    %Bewegung nach unten (Richtungsvektor Strahl)
14 yv = -1;
15
16 gamma = pi/5;              %Winkelbreite bei der Streuung Reflexion --> ↔
   Anzahl neuer Strahlen
17 a = 3;                     %Anzahl Anfangsstrahlen pro m
18 inten = 1000000/a;         %Intensitaet eines Strahls, 1MW pro m
19 beta_Schritt = pi/180;     %Schrittweite beta
20 emission_n = 50;          %Anzahl Flaechenelemente / Emissionspunkte
21 emission_gamma = pi/8;     %Winkelbreite Streuung Emission
22 Anzahl_beta = pi/beta_Schritt; %Anzahl der zu Betrachtenden Winkel
23
24
25 Lt = 293.15;               %in Kelvin = 20Celsius
26 Lb = 298.15;               % = 25Celsius
27 Mt = 623.15;               % = 350Celsius
28 Mb = 873.15;               % = 600Celsius
29
30
31 %Grafische Darstellung von Reflexion und Emission (Optional)
32 if zeichnen;
33     beta = pi/2;            %Werte fuer den Plot, Oeffnungswinkel 45Grad
34     d = h* tan(beta/2);     %Berechnung d
35     xs = d/3;               %X-Koordinate Anfangsstrahl
36
37     figure('Name','Beispiel: Streuung eines Lichtstrahles'); %Plot ↔
   erstellen
38     axis off;                %Ohne ↔
   Achsen
39     title('Streuung des Lichtes'); %Titel des ↔
   Plots
40     ZackenVektor(beta, h); %Zacke + ↔
   Plot zeichnen
41     axis equal;             %↔
```

Gleichmaessige Skalierung X- und Y-Achse

```

42
43 VerlustStreu3_Plot(h, xs, ys, xv, yv, inten, gamma, beta, 5); %↔
    Berechnung und Zeichnen Streuungsverluste von einem Strahl
44 %line ([xs xs], [4*ys dreiecke(xs, beta,h,d)], 'Color', 'green', '↔
    LineWidth',1);
45
46 figure('Name','Beispiel: Emission von infrarotstrahlen'); %Analog
47 axis off;
48 title('Emission');
49 ZackenVektor(beta, h);
50 axis equal;
51
52 xs = d/4 + d/9;
53 VerlustStreu3_Plot_nur_blume(h, d, xs, ys, xv, yv, inten, gamma, ↔
    beta, 6); %Berechnung und Zeichnen Emissionsverluste an einem ↔
    Punkt
54 %line ([xs xs], [4*ys dreiecke(xs, beta,h,d)], 'Color', 'green', '↔
    LineWidth',1);
55 end
56
57 Q = zeros(size(Anzahl_beta,1)); %Ergebnisarray erstellen ↔
    fuer Konvektionsverluste der Groesse Anzahl_beta x 1
58 E = zeros(size(Anzahl_beta,1)); %Ergebnisarray erstellen ↔
    fuer Streuungsverluste
59 M = zeros(size(Anzahl_beta,1)); %Ergebnisarray erstellen ↔
    fuer Emissionsverluste
60 Gesamt = zeros(size(Anzahl_beta,1)); %Gesamtergebnisarray ↔
    erstellen
61
62 plotQ = figure('Name','Q - Verlust durch Konvektion'); %Plot Erstellung
63 title('Leistungsverlust durch Konvektion') %Plot Name
64 xlabel('\beta (in Radianten)') %X-Achse ↔
    beschriften
65 ylabel('Leistungsverlust (in Watt)') %Y-Achse ↔
    beschriften
66 xlim([0 pi]) %X-Achse von 0 ↔
    bis Pi
67 set(gca,'xtick',[0:pi()/2:pi()]) %X-↔
    Achsenmarkierungen in pi/2 Schritten
68 set(gca,'xTickLabel',{'0','\pi/2','\pi'}) %X-↔
    Achsenmarkierungen nicht in numerischen Werten
69
70 plotE = figure('Name','E - Verlust durch Streuung'); %Analog zu ↔
    Konvektion
71 title('Leistungsverlust durch Streuung')
72 xlabel('\beta (in Radianten)')
73 ylabel('Leistungsverlust (in Watt)')
74 xlim([0 pi])
75 set(gca,'xtick',[0:pi()/2:pi()])
76 set(gca,'xTickLabel',{'0','\pi/2','\pi'})
77

```

```

78 plotM = figure('Name','M - Verlust durch Emission'); %Analog zu ↔
    Konvektion
79 title('Leistungsverlust durch Emission')
80 xlabel('\beta (in Radianten)')
81 ylabel('Leistungsverlust (in Watt)')
82 xlim([0 pi])
83 set(gca,'xtick',[0:pi()/2:pi()])
84 set(gca,'xTickLabel',{'0','\pi/2','\pi'})
85
86 plotGesamt = figure('Name','Gesamt - Verlust durch Konvektion , ↔
    Streuung und Emission'); %Analog zu Konvektion
87 title('Gesamter Leistungsverlust')
88 xlabel('\beta (in Radianten)')
89 ylabel('Leistungsverlust (in Watt)')
90 xlim([0 pi])
91 set(gca,'xtick',[0:pi()/2:pi()])
92 set(gca,'xTickLabel',{'0','\pi/2','\pi'})
93
94
95 %Berechnung der Verluste fur alle zu untersuchenden Winkel mittels einer
96 %For-Schleife
97
98 minimum_i = 1;
99 interbegin = pi/4; %Startwinkel fuer ↔
    Berechnung
100 interende = 3*pi/4; %Endwinkel fuer ↔
    Berechnung
101 intergr = interende - interbegin; %Zu ↔
    untersuchender Bereich
102 betaInter = intergr / Anzahl_beta %Winkelschritt
103
104
105 for i= 1: (Anzahl_beta-1); %Anzahl der ↔
    Durchlaufe = Anzahl der zu ueberpruefenden Winkel
106 disp(['Berechne - ',num2str((i/(Anzahl_beta-1))*100),'%'])
107 beta = interbegin + i * betaInter;
108
109
110 d = h* tan(beta/2); %Halbe ↔
    Zackenbreite
111
112 aZ =a*(2*d); %Anzahl Strahlen ↔
    pro Zacke, numerisch
113
114 aZ = floor(aZ); %Anzahl Strahlen ↔
    pro Zacke, ohne Dezimalstellen
115
116 result = zeros (size (aZ, 1)); %Matrix aus ↔
    Ergebnissen
117
118 %Streuungverluste
119 for k = 1: (aZ); %Anzahl der ↔

```

```

    Durchlaeufe = Anzahl der Strahlen
120    disp(['Berechne - ', num2str((i/(Anzahl_beta-1))*100 + k/aZ/↔
        Anzahl_beta ), '%'])
121    xs = -0.001+ k * ((2*d)/aZ);           %X-Wert des k-ten↔
        Strahls
122
123    if xs == d;                             %Strahl nicht auf↔
        Schnittpunkt der zwei Seiten!
124        xs = d + 0.00000001;
125    end
126
127
128    result(k)=VerlustStreu3(h, xs, ys, xv, yv, inten, gamma, beta); ↔
        %Verluste bei k-tem Strahl, in Ergebnismatrix an k-ter Stelle
129
130
131
132    end
133
134    E(i) = sumabs (result)/ (2*d);           %Reflektion in W↔
        /m
135
136    %Konvektionsverluste
137
138    Q(i) = 50 / sin(beta/2) * ( Mb + Mt - Lb - Lt); %Konvektion in W↔
        /m
139
140
141    %Emissionsverluste
142
143    M(i) = Emission(beta, h, emission_n, emission_gamma); %Emission in W↔
        /m
144
145
146    %Insgemte Verluste
147
148    Gesamt(i) = Q(i) + E(i) +M(i);           %Gesamtergebniss↔
        (noch ohne Emission)
149
150
151    if i > 1                                 %Ausgabegraphen ↔
        Verluste
152        figure(plotQ);
153        %line([beta-beta_Schritt beta], [Q(i-1) Q(i)])
154        line([interbegin+(i-1)*betaInter beta], [Q(i-1) Q(i)])
155        figure(plotE);
156        %line([beta-beta_Schritt beta], [E(i-1) E(i)])
157        line([interbegin+(i-1)*betaInter beta], [E(i-1) E(i)])
158        figure(plotM);
159        %line([beta-beta_Schritt beta], [M(i-1) M(i)])
160        line([interbegin+(i-1)*betaInter beta], [M(i-1) M(i)])
161        figure(plotGesamt);

```

```

162     %line([beta-beta_Schritt beta], [Gesammt(i-1) Gesammt(i)])
163     line([interbegin+(i-1)*betaInter beta], [Gesammt(i-1) Gesammt(i)↵
        ])
164     end
165
166     if(Gesammt(i) < Gesammt(minimum_i));           %Bestimmung des ↵
        Minimums
167         minimum_i = i;
168     end
169 end
170 disp('Fertig')
171 disp(['Der Beste gepruefte Winkel liegt bei : ',num2str((interbegin + ↵
        minimum_i * betaInter)*180/pi),' Grad!'])

```

Anhang B.2: Zacken als Vektor

```

1
2 function [] = ZackenVektor( beta , h )
3     d = h * tan(beta/2);           % halbe dreiecksbreite
4     z1_x = [0 d];                 % x-Werte erste Zackenseite
5     z1_y = [h 0];                 % y-Werte erste Zackenseite
6     z2_x = [d 2*d];               % x-Werte zweite Zackenseite
7     z2_y = [0 h];                 % y-Werte zweite Zackenseite
8     line (z1_x, z1_y, 'Color', 'black', 'LineWidth',3); %Graphische ↵
        Ausgabe erster Zacken
9     line (z2_x, z2_y, 'Color', 'black', 'LineWidth',3); %Graphische ↵
        Ausgabe zweiter Zacken
10
11 end

```

Anhang B.3: VerlustStreuung (Mit Plot, iterativ)

```

1 function [ verlust ] = VerlustStreu3_Plot( h , xs , ys , xv , yv , ↵
        intensitaet , gamma , beta, maxRekurs)
2
3 %Berechnung der Verluste fuer einen Strahl bei gegebenem Oeffnungswinkel↵
        ,
4 %Streuwinkel und maximal Rekursionssufe. Zusaetzlich dazu mit grafischer
5 %Ausgabe der Reflexion und des Strahlenverlaufs. Nur zur ↵
        Veranschaulichung,
6 %nicht fuer die endgueltige Berechnung
7
8 import java.util.LinkedList;       % Verwendung der Java ↵
        Struktur LinkedList,
9
10 d = h* tan(beta/2);
11
12 verlust = 0;                       %Startwert, keine Verluste
13 verlust2 = 0.05;                   %Erster Schritt, 5% Verluste
14

```

```

15 xsL = LinkedList(); %Erstellen einer LinkedList ←
    fuer X-Werte des Strahlen Stuetzvektors
16 ysL = LinkedList(); %Erstellen einer LinkedList ←
    fuer Y-Werte des Strahlen Stuetzvektors
17 xvL = LinkedList(); %Erstellen einer LinkedList ←
    fuer X-Werte des Strahlen Richtungsvektors
18 yvL = LinkedList(); %Erstellen einer LinkedList ←
    fuer Y-Werte des Strahlen Richtungsvektors
19 intensL = LinkedList(); %Erstellen einer LinkedList ←
    fuer Intensitaet eines Strahls
20 rekursL = LinkedList(); %Erstellen einer LinkedList ←
    fuer Rekursionsschritt
21 xsL.add(xs); %Hinzufuegen des ersten ←
    Elements
22 ysL.add(ys);
23 xvL.add(xv);
24 yvL.add(yv);
25 intensL.add(intensitaet);
26 rekursL.add(1);
27
28
29 rekurs = 1;
30 konv = false;
31
32
33 while rekurs <= maxRekurs; %Aufuehren bis Maximaler←
    Rekursionsschritt erreicht
34 if ~konv; %Falls nicht Konvergent,←
    auf Konvergenz ueberpruefen
35 konv = Konvergiert(verlust, verlust2);
36 end
37
38 verlust2 = verlust;
39
40 xs = xsL.remove(); %erstes Element ←
    der Liste einlesen und loeschen
41 ys = ysL.remove();
42 xv = xvL.remove();
43 yv = yvL.remove();
44 intens = intensL.remove();
45 rekurs = rekursL.remove();
46
47 [r1, t1] = Schnittpunkt_Z1(h , d , xs , ys , xv , yv);
48 [s2, t2] = Schnittpunkt_Z2(h , d , xs , ys , xv , yv);
49
50 if r1 >= 0 && r1 <= 1 && t1 >0; %schnittpunkt ←
    erste
51 links = true; %linker Zacken
52 t = t1;
53 elseif s2 >= 0 && s2 <= 1 && t2 > 0; %schnittpunkte ←
    zweite
54 links = false; %rechter Zacken

```

```

55     t = t2;
56 else
57     verlust = verlust + intens;           %Kein ←
58     Schnittpunkt, also Verlust
59     if(rekurs < maxRekurs)
60         line([xs xs+xv], [ys ys+yv], 'Color', [rekurs/(maxRekurs+1) ←
61             1-rekurs/(maxRekurs+1) 0]); %Verluststrahl zeichnen
62     end
63     continue;
64 end;
65
66 x = xs + t * xv;                         %←
67     Schnittpunktkoordinaten
68 y = ys + t * yv;
69
70 if(rekurs < maxRekurs)
71     line([xs x], [ys y], 'Color', [rekurs/(maxRekurs+1) 1-rekurs/(←
72         maxRekurs+1) 0]); %Strahl zu Schnittpunkt zeichnen
73 end
74
75 %Erstellen neuer Strahlen
76
77 startwinkel = beta/2 + gamma/2;          %Startwinkel ←
78     festlegen
79 endwinkel = startwinkel + pi - gamma/2;  %Endwinkel ←
80     festlegen
81
82 for theta = startwinkel:gamma:endwinkel; %theta Laufvariable←
83     , in gamma Schritten
84     if theta < pi;
85         if links;
86             xv = 1;
87         else
88             xv = -1;
89         end;
90     elseif theta == pi;
91         xv = 0;
92         yv = 1;
93     elseif theta > pi;
94         if links;
95             xv = -1;
96         else
97             xv = 1;
98         end;
99     end;
100
101     if theta ~= pi;
102         yv = xv * tan(theta-(pi/2));
103         if ~links;
104             yv=-yv;
105         end;

```

```

100     end;
101     intens = intensitaet*0.05*(floor(pi/gamma))^(-1); %Intensitaet ←
        der neuen Strahlen
102
103         xsL.add(x); %neue ←
        Strahlenkoordinaten in Liste
104         ysL.add(y);
105         xvL.add(xv);
106         yvL.add(yv);
107         intensL.add(intens); %neue ←
        Strahlenintensitaet in Liste
108         rekursL.add((rekurs + 1)); %Rekursionszaehler ←
        um 1 erhoehen
109     end
110 end
111
112 end

```

Anhang B.4: VerlustStreuung (Ohne Plot, mit Konvergenz)

```

1 function [ verlust ] = VerlustStreu3( h , xs , ys , xv , yv , ←
    intensitaet , gamma , beta)
2
3
4 %Berechnung der Verluste fuer einen Strahl bei gegebenem Oeffnungs- und
5 %Streuwinkel. Ohne Maximale Rekursion, dafuer mit Konvergenz
6
7 %Die Werte der Strahlen werden in eine Liste geschrieben, die der Reihe
8 %nach abgearbeitet wird. Dafuer bietet sich vor allem die Java Struktur
9 %Linked List an.
10
11 import java.util.LinkedList %Verwendung der Java ←
    Struktur LinkedList,
12
13 d = h* tan(beta/2);
14
15 verlust = 0; %Startwert, keine Verluste
16 verlust2 = 0.05; %Erster Schritt, 5% Verluste
17
18 xsL = LinkedList(); %LinkedList erstellen
19 ysL = LinkedList();
20 xvL = LinkedList();
21 yvL = LinkedList();
22 intensL = LinkedList();
23 xsL.add(xs); %Hinzufuegen des ersten ←
    Elements
24 ysL.add(ys);
25 xvL.add(xv);
26 yvL.add(yv);
27 intensL.add(intensitaet);
28
29 konv = false; %Annahme: Keine Konvergenz

```

```

30
31 %figure('Name','Streuung')
32 %stitle('Streuung')
33
34 while ~xsL.isEmpty() %Gehe Schritte durch, bis Liste leer
35
36     if ~konv %Falls keine Konvergenz, ueberpruefe ↔
37         auf Konvergenz
38         konv = Konvergiert(verlust, verlust2);
39     end
40     verlust2 = verlust; %Verlust des vorherigen Schrittes ↔
41     festhalten
42     xs = xsL.remove(); %erstes Listenelement einlesen und ↔
43     loeschen
44     ys = ysL.remove();
45     xv = xvL.remove();
46     yv = yvL.remove();
47     intens = intensL.remove();
48
49     %Shnittpunkte bestimmen
50     [r1, t1] = Schnittpunkt_Z1(h, d, xs, ys, xv, yv);
51     [s2, t2] = Schnittpunkt_Z2(h, d, xs, ys, xv, yv);
52
53     if r1 >= 0 && r1 <= 1 && t1 > 0; %schnittpunkt erster/linker
54         links = true; %linker Zacken
55         t = t1;
56     elseif s2 >= 0 && s2 <= 1 && t2 > 0; %schnittpunkte zweiter/↔
57         rechter %rechter Zacken
58         links = false;
59         t = t2;
60     else
61         verlust = verlust + intens; %Kein Schnittpunkt -> Verlust
62     end;
63     continue;
64     end;
65
66     x = xs + t * xv; %Schnittpunkt bestimmen
67     y = ys + t * yv;
68
69
70     %Erstellung der Richtungsvektoren der neuen Strahlen in Gamma ↔
71     Schritten
72
73     startwinkel = beta/2 + gamma/2;
74     endwinkel = startwinkel + pi - gamma/2;
75
76     for theta = startwinkel:gamma:endwinkel;

```

```

77     if theta < pi;
78         if links;
79             xv = 1;
80         else
81             xv = -1;
82         end;
83     elseif theta == pi;
84         xv = 0;
85         yv = 1;
86     elseif theta > pi;
87         if links;
88             xv = -1;
89         else
90             xv = 1;
91         end;
92     end;
93
94     if theta ~= pi;                                     %Y-Wert der ↔
95     Richtungsvektors der neuen Strahlen, wenn Theta ungleich Pi
96     yv = xv * tan(theta-(pi/2));
97     if ~links;                                         %Umkehrung, wenn ↔
98         auf rechter Seite
99         yv=-yv;
100    end;
101    intens = intensitaet*0.05*(floor(pi/gamma))^(-1); %Berechnung ↔
102    neuer Intensitaet der Strahlen
103
104    if ~konv                                           %Es werden nur neue ↔
105    Strahlen in die Liste geschrieben, wenn die Verluste ↔
106    konvergieren
107    xsL.add(x);
108    ysL.add(y);
109    xvL.add(xv);
110    yvL.add(yv);
111    intensL.add(intens);
112    end
113 end
114 end

```

Anhang B.5: Schnittpunkt mit linkem Zacken

```

1 function [ r, t ] = Schnittpunkt_Z1(h, d, xs, ys, xv, yv )
2 n = d*yv + h*xv;                                     %Ueberpruefen auf ↔
3 Parallelitaet
4 if n == 0 ;                                         %Ausgabe bei Parallelitaet
5     r = -1 ;
6     t = -1;
7 else                                               %Ausgabe bei Schnittpunkt
8     r = (h*xv + xs*yv - xv*ys)/n;                 %Fuer Schnittpunkt in ↔

```

```

      Abhaengigkeit von Seitenvektor
8      t = (d*(h-ys) - h*xs) / n;          %Fuer Schnittpunkt in ↔
      Abhaengigkeit von Strahlenvektor
9
10     end;
11
12 end

```

Anhang B.6: Schnittpunkt mit rechtem Zacken

```

1 function [ s, t ] = Schnittpunkt_Z2(h, d, xs, ys, xv, yv )
2 n = d* yv - h*xv;
3     if n == 0 ;
4         s = -1 ;
5         t = -1 ;
6     else ;
7         s = -(d*yv - xs*yv +xv * ys)/n;
8         t = -(d*(h+ys)-h*xs) / n;
9
10    end;
11
12 end

```

Anhang B.7: Konvergenz der Verluste

```

1 function [ bool ] = Konvergiert( ver1, ver2 )
2 Schwelle = 0.0001;
3 tunnelOben = ver1 * (1+Schwelle);
4 tunnelUnten = ver1 * (1-Schwelle);
5
6
7 if (ver2<=tunnelOben && ver2>=tunnelUnten)
8     bool = true;
9 else
10    bool = false;
11 end
12 end

```

Anhang B.8: Verlust Emission

```

1 function [ I ] = Emission( beta, h, n, gamma )
2
3
4 d = h* tan(beta/2);          %d berechnen
5 [x, y] = strahlen(beta, h, n); %Stuetzvektoren fuer ↔
      Flaechenelemente berechnen
6 A= 2*d/(sin(beta/2)*n);     %Flaeche der Flaechenelemente
7 I=0;                         %Startverlust
8

```

```

9
10 %Berechnung
11 for k = 1:n                               %Berchnung fuer alle ←
    Flaechenelemente
12     yp = y(k);                             %Y-Wert Stuetzvektor einlesen
13     xp = x(k);                             %X-Wert Stuetzvektor einlesen
14     T= yp/h*250 +623.15;                   %Temperatur des Flaechenelements
15     cI = (0.95*5.67*10^(-8)*A*T^4);        %Waermefluss an Flaechenelement
16     IStrahl = cI/(pi/gamma);               %Waermefluss pro Strahl auf ←
        Flaechenelement
17
18
19
20 %Ueberpruefung der Position der Strahlen
21 if xp < d;                                 %linker Zacken
22     links = true;
23 elseif xp == d;                           %Mitte des Kelches
24     I = I + cI;                            %Waermefluss kompletter Verlust
25     continue;
26 else                                       %rechter Zacken
27     links = false;
28 end
29
30
31 %Erstellen der Strahlen in gamma Schritten. Siehe VerlustStreu
32 startwinkel = beta/2 + gamma/2;
33 endwinkel = startwinkel + pi - gamma/2;
34
35 for theta = startwinkel:gamma:endwinkel;
36     if theta < pi;
37         if links;
38             xv = 1;
39         else
40             xv = -1;
41         end;
42     elseif theta == pi;
43         xv = 0;
44         yv = 1;
45     elseif theta > pi;
46         if links;
47             xv = -1;
48         else
49             xv = 1;
50         end;
51     end;
52
53     if theta ~= pi;
54         yv = xv * tan(theta-(pi/2));
55         if ~links;
56             yv=-yv;
57         end;
58     end;

```

```

59
60     %Streuungs-/Reflexionsverluste aufsummieren
61     I = I + VerlustStreu3(h, d, xp, yp, xv, yv, IStrahl, gamma, beta←
        );
62     end
63 end

```

Anhang B.9: Stützvektoren erstellen

```

1
2
3 function [ x,y ] = strahlen( beta, h, n )
4
5     d = h * tan(beta/2);           % halbe dreiecksbreite
6     x = zeros(n,1);               % Array fuer X-Werte erstellen
7     dx = (2*d)/n;                 % Groesse eines dx-Elements
8     for k=1:n;                     % X-Werte ausrechnen
9         x(k)=dx/2+(k-1)*dx;
10    end
11    y = dreiecke(x, beta , h, d);   % Y-Werte ausrechnen
12
13 end

```

Anhang B.10: Y-Werte der Stützvektoren

```

1 function [ y ] = dreiecke ( x , beta , h , d)
2
3
4
5     f = floor(x/d);                % n-ter abschnitt von d
6     x2 = x-d*f;                    % position in block f
7     y2 = x2 * (tan(beta/2))(-1);  %
8
9     om = (-1)*ones(size(f));
10    om = om.(f+1);                  % vorfaktor
11
12    y = y2 .* om;                    %
13    y = y + h/2*(ones(size(om))-om);
14 end

```

Eigenständigkeitserklärung

Name, Vorname

Matrikelnummer (freiwillige Angabe)

Ich versichere hiermit an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit/Bachelorarbeit/
Masterarbeit* mit dem Titel

selbständig und ohne unzulässige fremde Hilfe erbracht habe. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt. Für den Fall, dass die Arbeit zusätzlich auf einem Datenträger eingereicht wird, erkläre ich, dass die schriftliche und die elektronische Form vollständig übereinstimmen. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Ort, Datum

Unterschrift

*Nichtzutreffendes bitte streichen

Belehrung:

§ 156 StGB: Falsche Versicherung an Eides Statt

Wer vor einer zur Abnahme einer Versicherung an Eides Statt zuständigen Behörde eine solche Versicherung falsch abgibt oder unter Berufung auf eine solche Versicherung falsch aussagt, wird mit Freiheitsstrafe bis zu drei Jahren oder mit Geldstrafe bestraft.

§ 161 StGB: Fahrlässiger Falscheid; fahrlässige falsche Versicherung an Eides Statt

(1) Wenn eine der in den §§ 154 bis 156 bezeichneten Handlungen aus Fahrlässigkeit begangen worden ist, so tritt Freiheitsstrafe bis zu einem Jahr oder Geldstrafe ein.

(2) Straflosigkeit tritt ein, wenn der Täter die falsche Angabe rechtzeitig berichtigt. Die Vorschriften des § 158 Abs. 2 und 3 gelten entsprechend.

Die vorstehende Belehrung habe ich zur Kenntnis genommen:

Ort, Datum

Unterschrift

Literatur

- [1] BLUM, W. : Mathematisches Modellieren - zu schwer für Schüler und Lehrer. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007*. Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker, 2007
- [2] BLUM, W. : Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht - Herausforderung für Schüler und Lehrer. In: BÜCHTER, A. (Hrsg.) ; HUMENBERGER, H. (Hrsg.) ; HUSSMANN, S. (Hrsg.) ; PREDIGER, S. (Hrsg.): *Realitätsnaher Mathematikunterricht - vom Fach aus und für die Praxis. Festband für Hans-Wolfgang Henn zum 60. Geburtstag*. Hildesheim: Verlag Franzbecker, 2006
- [3] DAHMEN, W. ; REUSKEN, A. : *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 2. korr. Auflage, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008
- [4] GREEFRATH, G. ; KAISER, G. ; BLUM, W. ; BORROMEO FERRI, R. : Mathematisches Modellieren - Eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe. In: Borromeo Ferri, R. (Hrsg.) ; Greefrath, G. (Hrsg.) ; Kaiser, G. (Hrsg.): *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule*. Wiesbaden: Springer-Verlag, 2013
- [5] GREHN, J. ; KRAUSE J. (HRSG) : *Metzler Physik*, 3. Auflage, Braunschweig: Metzler Verlag, 2006
- [6] VON HARRACH, B. : *Einführung in die Optimierung*. <http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/~harrach/lehre/Optimierung.pdf>. Zuletzt aufgerufen: 07.02.2016
- [7] IQB (HRSG.): *Kompetenzentwicklung im Mathematik-Unterricht: Modellieren. Handreichungen zu VERA 8 Mathematik 2009*. http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lernstand8/upload/download/mat_mathematik/Kompetenzentwicklung_Modellieren.pdf. Version: 2009, zuletzt aufgerufen: 29.01.2016
- [8] KULTUSMINISTERKONFERENZ: *Bilungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf. Version: 2003, zuletzt aufgerufen: 29.01.2016
- [9] MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR BILDUNGSFORSCHUNG (HRSG.): *PISA 2000: Die Studie im Überblick. Grundlagen, Methoden und Ergebnisse*. https://www.mpib-berlin.mpg.de/Pisa/PISA_im_Ueberblick.pdf. Zuletzt aufgerufen: 28.03.2016.
- [10] MINISTERIUM FÜR SCHULE UND WEITERBILDUNG DES LANDES NORDRHEIN-WESTFALEN: *Kernlehrplan für das Gymnasium - Sekundarstufe I (G8) in Nordrhein-Westfalen - Mathematik*. <http://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/>

upload/lehrplaene_download/gymnasium_g8/gym8_mathematik.pdf. Version: 2007, zuletzt aufgerufen: 29.01.2016

- [11] MINISTERIUM FÜR SCHULE UND WEITERBILDUNG DES LANDES NORDRHEIN-WESTFALEN: *Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium / Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen - Mathematik*. http://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/klp_SII/m/KLP_GOSt_Mathematik.pdf". Version: 2014, zuletzt aufgerufen: 29.01.2016
- [12] OLSON, J.F.; MARTIN, M.O.; MULLIS, I.V.S. (HRSG.): *TIMSS 2007 Technical Report*. http://timssandpirls.bc.edu/TIMSS2007/PDF/TIMSS2007_TechnicalReport.pdf. Zuletzt aufgerufen: 28.03.2016.
- [13] WESTERMANN, B.: Anwendungen und Modellbildung. In: LEUDERS, T. (Hrsg.): *Mathematikdidaktik Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II*. Berlin: Cornelsen Verlag, 2011
- [14] WINTER, H.: Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 61* (1995), S. 37-46.

Abbildungsverzeichnis

1	Modellierungskreislauf nach Blum und Leiss [Quelle: [2], Blum, 2006, S. 9]	9
2	Vereinfachter Modellierungskreislauf nach Ortlieb [Quelle: [4], Greefrath, 2013, S. 16]	10
3	Solarthermiekraftwerk Planta Solar 20 in Spanien [Quelle: cityodat.blogspot.com]	15
4	Vereinfachte Darstellung eines Solarthermiekraftwerks [Quelle: wisions.net]	16
5	Grundaufriss der Problemstellung. [Quelle: Oliver Garbrecht]	17
6	Vereinfachte modulare Darstellung der Programmstruktur	19
7	Erste Modellannahme: Öffnungskelch zwischen zwei Pyramiden, zweidimensional	20
8	Berechnung auf einem festem Flächenelement	21
9	Streuung eines eingehenden Strahles, <i>MATLAB</i> Ausgabe	22
10	Öffnungskelch mit vektoriellen Koordinaten	24
11	Neue ausgehende Strahlen von Schnittpunkt P_1	24
12	Drei mögliche Strahlengänge	25
13	Diskretisierter Öffnungskelch	27
14	Ausgehende Strahlen eines exemplarischen Flächenelements	27
15	Winkelabhängige diskrete Berechnung	29
16	Temperaturverlauf der Luft und des Festkörpers, in Grad Celsius	31
17	Endergebnis Plots der Energieverluste	34